

# PRÆFATIO.

Quod expositum tibi cernis opusculum, B: L. domestico tantum usui, privignique mei studiis Mathematicis unicè destinatum fuerat, ut post elucubrata Analyseos ordinariæ præcepta ad nova hujus seculi inventa & recentiorum Geometrarum ipsi facilior pateret aditus. Quo solo forsan nomine hoc, quicquid est opellæ, veniam apud æquos rerum æstimatores merebitur, si omni dictionum pompâ viduum, styloque, qualis inter familiares ornatus cujuscunque expers in usu esse solet, negligenter exaratum, compellentibus amicis, in publicum prodeat. Tyroni scriptum tyronibus, etsi nonnulla nec provectioribus displicitura hic contineri sperem, hoc ipso forsitan prodesse poterit (magnos enim hic Viros, quorum inventis me plurimum debere gratus agnosco, eximios facio) quod, quæ fundamentis multum diversis inædificarunt Geometræ, ex unico tantum ac proprio curvarum principio deducere fatagat; requirere enim tale quid videbatur, quem disciplinæ Mathematicæ deposcunt, naturalis Præceptorum ordo, ac Theorematum etiam sublimiorum non nisi ex genuinis simplicioribusque principiis eruenda deductio. Quod, quantum incipientium studiis conferat, ignorare non poterunt, qui curvarum

proprietates ex recepto multorum more explorentes centri gravitatis, truncorum, ungularumque, curvarum curvilineorumque in & evolutionem, ac multijugæ præterea principiorum varietatis tædia devorare necesse habuerunt; Sola curvilineorum, tanquam polygona, consideratio fœcundo sinu non ea tantum curvarum Symptomata, quæ ab aliis principiis expectari poterant, verum & ipsorum principiorum fontem & originem complexa, quæ hactenus circa curvarum naturam à celeberrimis Mathematicis inventa omnes meritò in stuporem rapuerant, adm[illegible]gli quadam serie digesta orbi litterato exposu[illegible]; insigniorumque hujus seculi Virorum labores ac scrutinia demeruit. Hoc tamen superesse videbatur difficultatis, methodum à principibus hactenus Mathematicis in curvilineorum mensuris adhibitam, conclusionum potius emergentium multitudine, ac cum demonstrabilibus aliunde veritatibus convenientia, quam principiorum evidentiâ nixam certitudinem suam apagogicis magis demonstrationibus, quam inventionis rationi debere; cujus asserti demonstrationem hic adjicere supervacaneum est, cum, quæ huc spectant, ex *Considerationibus* nostris antehac editis abundè peti possint.

Placuit quidem celeberrimo *Wallisio*, non paucis in locis *Arithm. Infin.* de quantitatibus infinitè parvis, non tamen nisi hæsitanter admodum & sollicitè agere; diserteque *Schol. Prop.* CLXXXII affirmare, quamvis partem infinitè parvam (semel acceptam) nihilo æquivalere; quæ quidem assertio easdem, quas adversus *Baroviana* methodi demon-

monſtrationem in *Conſiderationibus* modo citatis reverenter movimus, difficultates evitare poſſe non videtur.

Tum vel maximè viſum eſt *Cel. Leibnitio*, anno 1689. menſe Febr. in *actis Lipſienſibus*, quædam ex ſuâ *Analyſi infinitorum* depromta diſcurſui de motuum cœleſtium cauſis lemmatum in modum præmittere; (in quem tamen locum non niſi poſt editas *Conſiderationes* incidi) utinam vero placuiſſet Eruditiſſimo D. Authori in re tanti momenti paulo apertius agere, ac quantitatum incomparabilium differentiam nihilo æquipollere demonſtratum dare; cum alioquin fruſtra rejiciantur ex æquationum contextu ea, quæ realis adhuc quantitatis eſſentia gaudent; neque etiam quantitas determinata incomparabili juncta (ſi hæc adhuc quantitas ſit) æqualis ſupponi poteſt eidem quantitati determinatæ, demtâ eâdem incomparabili quantitate: cum ea verè æqualia ſint, quæ differentiam habent nullam, non autem quæ differentiam incomparabilem, (modo quantitatibus adhuc annumeranda maneat.) Num vero quantitatum cum aliis incomparabilium differentiam nihilo ſtrictè æqualem eſſe voluerit Vir Nobil. me dubium reddunt, quæ §. 5. inſinuat D. Author, quo in loco libertatem concedit, *ſi quis adhibere nolit infinitè parvas, quantitates tam exiguas ſumendi, quam ſufficere, judicat, ut ſint incomparabiles & errorem quovis dato minorem producant.* Quod num accuratioris Geometriæ leges exactè ſatis obſervet, hic ulterius diſquirendi locus non eſt, nec niſi poſt explicatam enucleatius D. Autho-

thoris mentem, quod ſuo tempore expectabimus. Ut vero in orbitam redeam, hâc potiſſimum de cauſâ principii, quod curvarum proprietatibus methodo directâ explanandis par eſt ac ſufficit, inventionem pariter ac demonſtrationem difficiliores eſſe reor, quod infiniti quid involvere videtur ipſa curvarum indoles, tale quid ſaltem, quod conceptus noſtros tranſcendit ac ſuperat. Quamobrem & hoc ipſum principium non niſi ex ipſius infiniti naturâ peti poſſe credibile eſt. Cum autem hac quidem lege conditos nos voluerit creator noſter, ut, licet majorem ac minorem quavis conceptâ quantitate nobis repræſentare valeat imaginatio noſtra, non niſi finita tamen ac magnitudine determinata concipere queamus, ad infiniti ipſius notionem veram adæquatamque aſſurgere nequit intellectus humanus; hanc tamen, poſitâ quantitatis cujuſcunque in partes infinitas ſeu omnem datum numerum excedentes diviſibilitate, ex ipſius infiniti attributis veritatem elicere datum eſt, (quam & axiomatis ac fundamenti loco cæteris ſubſtravimus) *quicquid per numerum infinitum multiplicatum nullam quantitatem datam, utut exiguam, adæquare valet, entibus annumerandum non eſt, ac nihilo æquale haberi debet.* Cujus quidem effati certitudinem aliunde ac ex ipſis etiam Veterum aſſumtis (Poſtul. lib. x. *Euclid.* & *Archimed.* de Sphæra & Cylind. Axiom. v.) evincere in proclivi foret, niſi luce ſatis ſuâ enunciatio hæc radiare illis, quibus eam examinandam propoſueram, viſa fuiſſet: & hoc quidem ſolo ac unico principio celebriora hactenus recentiorum Geo-

metra-

metrarum inventa derivari posse, confirmationemque suam recipere sequentia, uti speramus, palam facient. Accedit maximi hinc momenti præterea veritatem directè sequi: *Omne nimirum divisibile, adeoque & omnem quantitatem, vi infinitâ in nihilum esse reducibilem, eâdemque vi infinitâ, quantitatem quamcunque ex nihilo produci posse*; cum ex eo productum esse, in quod divisione resolvi potest, quidlibet meritò censendum sit. Unde & omni quantitatum generi liquido impressus apparet omnipotentiæ ac divinitatis character; nullumque quantum, naturâ suâ æternum esse, (hoc est tale, quod ex nihilo nec produci nec in nihilum redigi potest) evidenti ac indubitabili prorsus consequentiâ evincitur, nisi enim divisibilia ac quanta quæcunque infinities infinitâ divisione in nihilum abeant, ac infinitesimæ pars infinitesima sit nihilo æqualis, omnes hactenus Mathematicos non immerito paralogismi reos egisse videtur Doct. *Cluverus*, periitque in universum Geometricarum demonstrationum ἀκρίβεια; ac magno lapsu corruent plurimæ, si non omnes, tum antiquorum, tum & hujus ævi, quocunque etiam ingenii acumine ac felicitate excogitatæ, inventiones. Quo vero, num ex præmisso modo Axiomate Methodum indivisibilium, quæ adhuc desiderabatur, inculpabilem, primariaque quæ hodiernorum Geometrarum industria detexit, legitimè deduxerim, apertius pateat, quem hoc in opusculo servaverim ordinem, paucis exponam.

Ac primo quidem, post assumtam quantitatis cujuscunque determinatæ in partes quâlibet datâ

 mino-

minores divisibilitatem, quas cum aliis *infinitesimas* vocito, Algorithmum hisce speciatim convenientem ac proprium exhibeo. Unde maximi statim usus consectarium ex earum multiplicatione procedit, *infinitesimam scilicet per infinitesimam multiplicatam nihilo æquivalere*: quæ porro curvis applicata, tandem Lem. 26. & 27. *ipsas omnes ex rectulis infinitesimis componi, adeoque & curvilinea esse infinitorum laterum polygona* (quod a multis antehac assumtum fuerat) ex præmissis evincunt. Tum post hujus Theorematis Lem. 33. demonstrationem, *in triangulo isosceli, basin habenti infinite parvam, angulos ad basin & rectos & æquales esse*; *Lem.* 41. & 42. inter eas lineas discrimen ostendo, quæ tanquam infinitesimæ, adeoque quantitatis adhuc naturam ac essentiam servantes, aliasque quæ nihilo æquales in calculo considerandæ sunt. Quod quanti momenti sit diagnosticum, illi norint, quibus Analysis infinitorum familiaris est, ac licet ad calculi securitatem omnino requiratur, num antea quispiam ostenderit, ignoro.

Subnexo denique lemmatibus hisce generali Scholio infinitesimarum naturam quodammodo illustro; unde N. XII. &c. Theorema quoddam prodit, cujus ope earum curvarum tangentes, quarum parametri indeterminatæ sunt, ad ordinarias curvas reducuntur, hinc & *maximi* & *minimi* determinatio methodo, ni fallor, novâ perficitur.

*Cap.* I. Tangentium ducendarum methodum exhibeo, *Barovianaque* demonstrationem, aliarumque insimul, quæ eodem cum ipsa funda-

damento nituntur: ac post particularia quædam in tyronum gratiam ex hisce deducta compendia, designatasque §. 24. iis curvis tangentes, quarum natura non ex applicatarum ad interceptam, sed ad alterius curvæ ad eundem axem applicitæ ordinatas relatione cognoscitur, §. 32. ac 33. duplicem propono methodum, ex data qualibet æquatione curvæ (sive terminis irrationalibus sive fractis quocunque signo copulatis conflata fuerit) tangentem ducendi; quod §. 34. ad ea curvarum genera exporrigo, quarum sive ad alias sive ad axem relatio non unicâ tantum, sed quolibet æquationum numero exprimitur. Donec ultimò §. 35. methodus exoriatur generalissima, *applicatis ad eundem axem quotlibet curvis, datâque æquatione communem earum relationem comprehendenti*; (sive hæc per earum applicatas interceptamve sive etiam per ipsarum curvarum portiones expressa fuerit) *æquationem aliam* (*subtangentialem* mihi dictam) *citra ullam calculi molestiam inveniendi, quæ singularum* (si cæteræ sint cognitæ) *pro arbitrio sumendarum subtangentes unâ operâ determinat*. Quod & §. 37. & seq. iis curvis applico, quarum parametri sunt indeterminatæ; unàque ex generalibus hisce æquationibus, quarum auxilio innumerarum curvarum tangentes eadem operâ definiuntur, ad particulares quaslibet curvas regressionem ostendo. Hinc §. 41. post curvarum quarundam, quæ alioquin anomalæ quodammodo videntur, ad leges æquationum vulgarium reductionem illarum subtangentes ex iisdem principiis inquiro, in quibus indeterminatæ quantitates inter potestatum exponen-

tes reperiuntur, quæque hactenus Geometris aut omnino prætermissæ aut parum admodum considerațæ videntur, cum multorum nihilominus problematum, satis alioqui difficilium, constructionibus inserviant; deinde ipsum subtangentium problema, in minus provectiorum exercitationem, ex aliis datis investigo; ac quomodo curvæ datæ non recta, sed curva quælibet designata, tangens ducatur, uno aut altero exemplo ostendo. Tum §. 78, cum singulis indeterminatis singulæ attribui possint infinitesimæ, earundem plures, ac paucis adhuc huic negotio applicitas subtangentium problemati solvendo adhibeo; insimulque generaliorum quorundam, nec specialem curvæ cujusvis cognitionem deposcentium, Theorematum inventioni viam sterno: unde peculiari, ni fallor, methodo obtinetur consectarii loco §. 87. universale *convexitates* & *concavitates* in omnibus curvis *diagnosticum*; ac definitio puncti, si detur, flexus contrarii, quod celebri inter Mathematicos Conchoïdis exemplo illustro.

§. 93. &c. de Subtangentium subnormaliumque methodo inversâ paucis ago, quam, licet principia innumeris ejusmodi problematis solvendis sufficientia addiderim, imperfectam nihilominus reliqui; eò tamen generalem tangentium inversarum inquisitionem deduxi, ut inter infinita, in quæ æquatio quælibet ex Cl. *Slusii* exemplo dividi potest, loca, duo tantum determinari necesse sit, quæ datam quandam inter se relationem obtinent, talem scilicet, qualis inter æquationem

tionem curvæ ipsiusque Subtangentialem ex legibus antea traditis requiri facillime ostenditur.

*Cap.* II. Curvilinea, cum verè polygona sint, adeoque & polygonorum more mensuranda, §. 1. in trapezia, quæ duo habent latera parallela; deinde in Triangula variis modis, §. 33. &c. distinguo; ac post præmissam indivisibilium methodum scrupulis omnibus liberam, §. 11. Cor. v. fundamentalem Cl. *Wallisii* Arith. Infin. LXIV. Propositionem, tum & lemma celeb. *Mercatoris* ac D. *Gregorii* eodem fonte derivo. Quibus §. 13. huic calculi generi magis accommodatum ac generale Theorema subnecto; *Omnes scilicet terminos, infinitesimales collectivè sumtos ipsi termino, unde originem sumserunt, quique jugi ipsarum infinitesimarum coacervatione componitur, tanquam valori absoluto perpetim æquari.* Hinc post varias curvilineorum transmutationes, §. 18. Cor. II. methodum exhibeo, subnormales omnium ferme curvarum quomodolibet per interceptas applicatas ipsasque curvas expressarum unâ operâ designandi; ac Cor. III. Cl. *Wallis*: auctas multatasque series per tangentes inversas demonstro. Deinde post Celeb. *Newtoni* series in transitu strictim ventilatas, §. 24. præter ordinarium infinitesimarum numerum (quæ Triangulum Celeb. *Leibnitio characteristici* nomine vocatum constituunt) complures alias, in curvilineorum mensurâ adhibeo; plurimorumque theorematum, omnes in genere curvas spectantium, nondumque satis discussorum, originem aperio; ac post hinc emergentium, aliquot problematum solutiones *involutarum evolutarumque* figurarum pro-

proprietates, J. Gregorio primum consideratas eodem cum cæteris fundamento deduco.

*Cap.* III. Solida tracto, columnas, truncos ungulasque Cylindrorum sectione genitas; tum & ea, quæ ex curvilineorum rotationibus oriuntur, corpora conoidica, annularia &c.; methodique indivisibilium, in quantum solidis applicatur, demonstrationem adjungo. Ac ne, quæ ex Cap. II. peti possunt, inutili discursu hic repetere necesse habeam, problema infinitesimarum extra Triangulum characteristicum aliunde sese ingerentium naturam ac usum in corporum dimensione illustrans, (quod in planis curvilineis Cap. II, §. 57. generaliter ostenderam) in Solidis resolvo; *datâ nimirum Solidi, ex curvilinei circa axem rotatione geniti, aliusve cujuslibet expressione analyticâ, convenientem huic curvilineo applicatam exhibere.*

*Cap.* IV. Corporum capite præcedenti consideratorum superficies tracto, easque spectantem indivisibilium Geometriam demonstro.

*Cap.* V. Post trita quædam Baroviana, ac Tyronum captui accommodata §. 6. curvas methodo non admodum usitatâ expendo; unde varia, & nonnulla etiam nova eas mensurandi oriuntur principia; ac inter alia §. 10. ex quolibet curvilineo infinitas curvas mensurabiles eliciendi methodus, ab *Hugenianâ* evolutione diversa; quam tamen, tanquam primarium hujus seculi inventum, ex hoc, quo cætera derivavimus, etiam fonte manare §. 11. ostendo.

*Cap.* VI. Centri gravitatis cum traditis hic principiis symphonesin, Algebraicosque plurimorum

rum

rum tum curvilineorum, tum solidorum, ac superficierum curvarumque, ex prægressis capitibus collectos exponentes annexa brevi appendiculâ comprehendo.

*Cap.* VII. *Maximi* & *minimi* determinationem modo, ni fallor, Mathematicis adhuc intacto, ex infiniti tamen naturâ directè profluenti, commonstro; *Huddenianaque* methodi, utpote omnium generalissimæ, licet principio multum diverso inventæ, hoc tamen fundamento nixam demonstrationem adjicio. Quin & particulari hac *extrema* isthæc definiendi ratio prærogativa gaudere videtur, quod non unum tantum *maximum* & *minimum*, sed & plura, si problematis propositi natura ita ferat, eadem opera determinare valeat.

*Cap.* VIII. Varia calculi in *Analysi infinitorum* genera, ac imprimis *Leibnitii* Differentialem eodem cum prægressis fundamento demonstrabilem ostendo; quem & ad eas extendi quantitates, quæ potestatum indices indeterminatos habent. Sola *Differentiationum* successio, eodem cum cæteris principio deduci renuit. Quæque eam infestare videntur difficultates D. Authori in *Considerationibus* ex parte proposui, ac hoc in loco instantia una ac altera roboravi; quarum solutionem insimulque legitimam repetitarum differentiationum confirmationem, ne tantum inventum in Geometria intercidat, summo desiderio meritò exoptat orbis Mathematicus.

*Cap.* IX. Æquationum infinitesimas continentium, naturam respectu earundem, inquiro, ac poly-

polychreſtum quoddam ex iiſdem conſectarium deduco, quod methodo huic multùm promovendæ ejuſque ad innumeras infiniteſimas applicationi inſervit, ac repetitarum differentiationum quoddam velut ſuccedaneum haberi poteſt. Infiniteſimarum enim hinc infiniteſimas, quacunque licet numeri infiniti poteſtate diviſas, (quas alioquin nihilo æquales ac idcirco æquationum, quibus adhærent, terminos merè evanidos eſſe in prioribus eviceramus) non leve tamen in quantitatum aſſignabilium, curvas ſpectantium, rationibus inquirendis pondus habere ex ritè perpenſâ earum indole ac proprietatibus innoteſcit.

*Cap*. X. Methodum infiniteſimalem inverſam commentariis quibuſdam illuſtro; cumque Cap. II. §. 13. huic aperiat aditum, occaſiones, quibus ab infiniteſimis ad quantitates abſolutas indeterminataſque regreſſio ſecurè datur, ab aliis, quæ errorem forſan inducerent, quibuſdam in caſibus diſtinguo; quædam obiter admonuiſſe contentus, quibus ulterius perficiendis otii magis, quam mihi reliquum eſt, requiritur.

*Cap*. XI. Miſcellanea quædam, interque ea methodum, quâ ad æquationem ſubtangentialem, in *Conſiderationibus* ad ſolutionem *Bernoulliani* problematis adhibitam, deveni. Tum & ea, quæ cauſticarum, plurimarumque aliarum conſimili modo genitarum curvarum proprietates concernunt, modo à *Tſchirnhauſiano* aliquatenus differenti, generali Theoremate comprehendo.

Schemata, ne in immenſum excreſcerent, pluribus quandoque paragraphis accommodata ſunt;

un-

unde, ne linearum multitudine confusio inducatur, tyronibus author sum ut figurarum lineas propositioni, quæ præ manibus est, inservientes, missis cæteris, seligant; novasque exinde ac scopo unicè conuenientes sibi, (quod facillimo negotio obtinetur) si occasio tulerit, figuras efforment. Signum [] Cap. I. §. 17. adhibitum terminorum hinc & inde consistentium tantum separationem, ⌶ æqualitatem denotat.



E R-

# ERRATA.

Pag. 3, lin. 20, pro $\frac{c}{x}$ lege $\frac{c}{x}$. p. 6. lin. ultima pro cta lege recta. p. 9, l. 4, hinc, lege, huic. p. 17, l. 13, $\frac{dn}{r^4}$, leg. $\frac{dn}{r^4}$. lin. 23, $\frac{d^n}{q}$, leg. $d^n$. p. 20, l. 18 $\frac{ly}{mm}$, l, $+\frac{ly}{mm}$. p. 37, l. 2, gut, l. gat. p. 46, l. 1, l. § 34. p. 47, l. ult., pro $\frac{zz-rz}{r}$ l. $\frac{zz-rz}{b}$. p. 56, l. 22, huic, l. hinc. p. 65, l. 18, *gte*, l. $g+e$. p. 67, l. 4, $rx-fy$, l. $rx-fy$. p. 101, l. 9, l. proximos. p. 129, lin. 6, $\frac{3}{3}y$, leg. $\frac{3}{2}y$. p. 134, lin. ult. $p+i$, l. $p+1$. p. 139, l. 9, sen, l. seu. p. 139, l. 25, l. propositum. p. 178, l. 19, l. nimirum. p. 181, l. 7. Orei-, leg. orie-. p. 183, l. 18, *kda*, l. *kdr*. p. 249, lin. 21, l. Coroll. III. p. 269, lin. 17, l. *incognitam*. p. 270, l. 12, l. instar. p. 271. lin. penult. $bx$, l. $bx^4$.

---

*Bericht voor den Boekbinder.*

DE Figuren moeten alle achter aangestelt werden, malkander volgende als de getallen daar op staande aanwysen, en zyn geordineert om buiten het Boek uit te slaan, waarom de witte plaats van 't Papier niet moet werden afgesneden.

# ANALYSIS INFINITORUM,

*Seu*

Curvilineorum proprietates

*Ex*

Polygonorum naturâ deductæ.

## DEFINITIONES.

1. Atam quantitatem omnem eam voco, quæ determinabilis est; cujusque magnitudo imaginationis humanæ limites non excedit.

2. Unde, quid per quantitatem quâlibet datâ minorem; aut majorem intelligendum veniat, ipso nomine apertum est.

3. Quantitatem quâlibet datâ minorem, compendii gratia, *infinitesimam*; majorem, *infinitam* appellare liceat.

# AXIOMATA.

1. QUicquid toties ſumi, hoc eſt per tantum numerum multiplicari non poteſt, ut datam ullam quantitatem, ut ut exiguam, magnitudine ſuâ æquare valeat, quantitas non eſt, ſed in re geometricâ merum *nihil*.

2. Quælibet quantitas data in partes quâlibet datâ minores, tum æquales inter ſe, tum inæquales, eſt diviſibilis.

# LEMMATA.

1. OMnis quantitas vel data eſt, vel qualibet datâ minor, aut major.

2. Cumque omnis numerus ſit quantitas, idem de numero intelligendum venit.

3. Quælibet data quantitas per numerum quemlibet eſt diviſibilis.

4. Et quotiens inde ortus, ejuſdem quantitatis pars eſt.

5. Quæ pars præciſè juxta diviſoris denominationem eâ quantitate minor eſt.

Ex. Gr. ſi quantitas $b$ dividatur per numerum binarium, quotiens $\frac{b}{2}$ ipsâ $b$ duplo

plo minor eſt; ſi per ternarium triplo minor &c.

6. Unde, ſi quantitas per numerum quolibet dato majorem dividatur, erit quotiens pars ejus quantitatis qualibet datâ minor.

Ex. Gr. numerus quolibet dato major vocetur $m$, (quod & in ſeqq., ni aliud moneatur, obtinebit) item ſint aliæ datæ quantitates $b$ & $c$, erunt $\frac{b}{m}$ & $\frac{c}{m}$ partes ipſarum $b$ & $c$ qualibet datâ minores; conſequentiæ ratio ex præcedentibus patet.

7. Pars cujuſcunque quantitatis qualibet datâ minor $\frac{b}{m}$, erit etiam omni aliâ datâ quantitate minor.

*Demonſtr.* Si neges, ſit deſignata quantitas $k$ minor ipſâ $\frac{b}{m}$, erit $mk$ minor ipsâ $b$, & $m$ minor ipsâ $\frac{b}{k}$; adeoque numerus quolibet dato major $m$, minor erit numero ſeu quotiente dato, quod repugnat.

8. Si partes qualibet datâ minores $\frac{b}{m}$ & $\frac{c}{m}$ ad ſe mutuo addantur, vel a ſe mutuo ſubtrahantur, ſumma $\frac{b+c}{m}$, & differentia $\frac{b-c}{m}$ reſpectivè partes erunt qualibet datâ minores ſummæ vel differentiæ totorum, uti patet.

 9. Mul-

9. Multiplicetur $\frac{b}{m}$ per datam quandam $r$, erit factum $\frac{br}{m}$ rectangulum omni datâ minus, aut rectanguli $br$ pars qualibet datâ minor, juxta Lem. 6.

10. Si pars qualibet datâ minor $\frac{b}{m}$ ducatur in se ipsam, vel aliam qualibet datâ minorem $\frac{c}{m}$, erit productum $\frac{bb}{mm}$ seu $\frac{bc}{mm}$ æquale nihilo seu non quantum.

*Demonstr.* Multiplicetur enim quotiescunque libuerit hoc productum, & si placeat per numerum omni dato majorem $m$, emerget $\frac{bb}{m}$ aut $\frac{bc}{m}$, quæ singula sunt qualibet datâ quantitate minora, (Lemm. 7.) adeoque nullam datam quantitatem, ut ut exiguam, æquare valent, quare juxta Axioma 1. $\frac{bb}{mm}$ seu $\frac{bc}{mm}$ sunt nihilo æqualia.

11. Duæ quantitates $\frac{b}{m}$ & $\frac{c}{m}$, qualibet datâ minores sunt inter se, ut quantitates $b$ & $c$, quarum partes sunt, sic $\frac{b}{m} : \frac{c}{m} :: b : c$.

12. Si pars qualibet datâ minor $\frac{b}{m}$ per aliam quâlibet datâ minorem $\frac{c}{m}$ dividatur erit quotiens

tiens $\frac{b}{c}$ idem, quod ex divisione totorum proportionalium resultaret.

13. Eadem $\frac{b}{m}$ si per determinatam $r$ dividatur, erit quotiens $\frac{b}{rm}$ ipsius $\frac{b}{r}$ pars qualibet datâ minor, juxta Lem. 6.

14. Sit determinata $r$, & fiat, $r : \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : x$ erit $x$ seu $\frac{bc}{rmm}$ juxta Lemma 10. nihilo æqualis.

15. Si vero assumta ipsius $r$ parte qualibet datâ minori, fiat $\frac{r}{m} : \frac{b}{m} :: \frac{c}{m} : x$, erit $x = \frac{bc}{rm}$, seu pars quâlibet datâ minor ipsius $\frac{bc}{r}$, Lemma 6.

16. $\sqrt{\frac{bb}{mm} + \frac{cc}{mm}}$ est æqualis parti qualibet datâ minori ipsius $\sqrt{bb+cc}$, seu $\frac{1}{m}\sqrt{bb+cc}$, quod ex fundamentis Algebræ notum est.

17. Sit autem determinata $r$, ac detur ex calculo $\sqrt{rr + \frac{bb}{mm}}$, erit hoc æquale ipsi $r$.

Cum enim $\frac{bb}{mm}$ juxta Lem. 10, sit æquale nihilo, erit $\sqrt{rr + \frac{bb}{mm}} = \sqrt{rr} = r$.

18. Sint $b$ & $c$ ita ad se mutuo relatæ, ut neutrâ earum existente omni datâ majori, si alter-

 utra

utra, vel quantitas sit, vel in totum evanescat, etiam altera semper necessario vel quantitas sit, vel nihilo æqualis fiat.

Dico, si alterutra, verb. gr. *b*, sit omni datâ minor, etiam *c* fore qualibet datâ minorem.

*Demonstr.* si neges, erit, juxta Lemm. 1, *c* vel omni datâ major, quod repugnat assumtis, vel data, ac tum *b* etiam erit data contra hypothesin, vel nihilo æqualis, ac tum *b* quoque talis foret, contra suppositum.

19. Hinc si, *Fig. I*, in cujusvis trianguli *A E G* quolibet latere *A E* statuatur *A C* quavis datâ minor, erunt, ductâ *K C* ipsi *G E* parallelâ, lineolæ, *K C*, *A K*, singulæ quavis datâ minores & vice versâ.

*Demonstr.* habent enim *A K* & *C K* ad lineolam *A C* relationem lemm. præced. suppositam.

20. Eadem quoque relatio obtinet, *Fig. II*, inter Curvæ Arcum *A C D*, eique subtensam *A D*, ac sinum *A E*: unde omnis arcus quovis dato minor subtenditur à cordâ quavis datâ minori, habetque sinum quovis dato minorem, & contra.

21. Quin & expositâ curvâ *A C D*, *Fig. III*, notæ proprietatis versus eandem partem concavâ, eique subtensâ *A D*, si ducatur ex puncto *D* recta *D G* faciens cum subtensâ *A D* angulum

*A D G*

*ADG* vel rectum vel recto majorem; tangat autem curvam in puncto *A* linea *AG*, occurrens rectæ *DG* in *G*, sitque *HG* rectarum *AG* & *AE* differentia seu *AG* — *AE*: Dico, si Arcus *AC* (vel juxta præcedentem, subtensa *AC*) sumatur omni dato minor, etiam *HG*, seu *AG* — *AE*, fore omni datâ minorem.

*Demonstr.* dato enim arcu *AC*, datur *AE*, & ob datam *AG*, datur quoque *AG* — *AE*, seu *HG*. Secundo, evanescente arcu *AC*, ob linearum *AE* & *AG*, hoc in casu, cöincidentiam, adeoque & æqualitatem, & ipsa *HG* evanescet, quare, per Lemma 18, constat propositum.

22. In triangulo *AEG*, *Fig. I*, cujus angulus *E* est vel rectus vel obtusus, ducatur *KC* lateri *GE* parallela, erit ut *AE* ad *AC*, ita differentia linearum *AG* & *AE*, ad differentiam *AK* & *AC*.

*Demonstr.* nam ob rectarum *KC* & *GE* parallelismum erit *AG* : *AE* : : *AK* : *AC*. unde divid. & altern. *AG* — *AE* : *AK* — *AC* : : *AE* : *AC*.

23. Repetito lemmate 21, sit, *Fig. III*, *AC* arculus omni dato minor, ac per punctum *C* ducatur recta *KL* ipsi *DG* parallela, productâque subtensâ *AC* in *E*, erit differentia tangentis *AK* & subtensæ *AC* æqualis nihilo.

*Demonstr.* sit $AE : r$, & subtensa $AC : \frac{b}{m}$, quæ, juxta Lemma 20. qualibet datâ minor est, cum arcus $AC$ talis sit ex hypothesi; sit item $HG : \frac{c}{m}$, juxta Lemm. 21. omni datâ minor; tandem differentia rectarum $AK$ & $AC$ seu $AK - AC$ dicatur $x$; erit ex præcedenti $r : \frac{b}{m} : : \frac{c}{m} : x$, unde $x$ seu $\frac{bc}{rmm}$, per Lem. 10. aut 14. nihilo æquatur.

24. Hinc, in argumentatione circa quantitates omni datâ minores, subtensa $AC$ æquatur tangenti $AK$; cum, juxta præcedentem, nulla sit earum differentia.

25. Tum & tangens $AK$, subtensâ AC, ac Curva AC inter se æquales sunt.

Cum enim Curva AC sit major subtensâ AC, & minor tangenti AK, uti omnibus notum, erit differentia Curvulæ AC & alterutrius rectæ AK vel AC, non major quam differentia rectarum AK & AC, quæ juxta Lemm. 23, nullla est.

26. Adeoque omnis Curva ACD ex rectulis quavis datâ minoribus, quæ tanquam tangentes AK, aut subtensæ AC, considerari possunt, constat.

27. Unde pariter clarum est, si calculum in-

ingrediatur curvæ cujusvis particula omni datâ minor, ut AC, posse ejus loco substitui vel ipsius subtensam AC, vel tangentem AK hinc curvulæ respondentem; utpote quarum omnium differentia nulla est.

28. Punctum P & curva ABD, *Fig. IV*, ita ad se invicem referantur, ut ductis PA, PD, ad curvam, omnes dëinceps rectæ a puncto P versus curvam ABD projectæ ab A versus D perpetuò crescant, aut saltem non decrescant; si ducatur AG, curvam tangens in A, item PB ipsam AG secans in S, & curvam in B; Dico primo, AS fore majorem, quam AB.

*Demonstr.* Cum PB sit major rectâ PA, erit angulus PAB major angulo PBA, (I. 18: Eucl.) sed angulus PBF (I. 32: Eucl.) major PAB; ergo idem PBF, seu ipsi ad verticem oppositus ABS multo major ipso PBA, hoc est (I. 32, eucl.) ABS multo major summâ angulorum BAS & ASB; ergo in triangulo ABS, erit ABS angulorum maximus; quare, (I: 19. Eucl.) AS major ipsâ AB.

29. Secundo, manentibus iisdem, si, *Fig. IV*, ex B ducatur BL ipsi PG æquidistans, dico AL fore majorem, quam AS.

*Demonstr.* Angulus AFG (I: 32. Eucl.) major Angulo PBF & huic ad verticem

opposito *ABS*, jam autem, ob parallelas *FG* & *BL*, angulus *ABL* est æqualis angulo A *FG*; ergo angulus *ABL* major ipso *ABS*, unde *AL* major, quam *AS*.

30. Retentâ eâdem hypothesi, si *AB* sit pars curvæ omni datâ minor, dico differentiam ipsarum *AS* & *AB* esse nullam.

*Demonstr.* *AL* est major quam *AS*, ex præced. unde $AS - AB$ minor est, quam $AL - AB$, sed $AL - AB$ ex Lem. 23. est non quantum, adeoque, quod eo minus est, $AS - AB$ quantum non erit, ergo nullum.

31. Hinc corollaria in modum Lemmatum 24, 25, 26, 27, quilibet suo marte eliciet, & tum hic, tum inibi, tradita aliis casibus, ubi curva versus punctum *P* convexa est, accommodabit.

32. Hoc particulare adjungere liceat; si curva *ABD* sit circumferentia circuli, cujus centrum *P*, sectorem *APB* eundem esse cum triangulo isosceli *APB*, cujus Basis subtensa *AB*; est enim hæc æqualis arcui *AB*, Lem. 25.

33. Si super basi, *Fig. V*, quavis datâ minori *AB*, seu $\frac{b}{m}$, constitutum sit triangulum isosceles *APB*, cujus latus *AP* seu *BP* est *p*, erunt singuli anguli ad basin *PAB* & *PBA* recti.

*Demonstr.* Ductâ enim normali *PD* erit

*DB*

$DB$: $\frac{\frac{1}{2}h}{m}$, factoque radio: $r$, & sinu anguli $PBD$: $y$, vocatâque $PB$: $p$, erit juxta trigonometriæ regulas, $r:p::y:\frac{py}{r}$ seu $DP$. Jam, ex I.47. Eucl: est $\frac{ppyy}{rr} + \frac{\frac{1}{4}hh}{mm} = pp$, rejectoq. per Lem. 10. termino $\frac{\frac{1}{4}hh}{mm}$, erit $\frac{ppyy}{rr} = pp$, seu $y = r$, hoc est, sinus anguli $PBD$ æqualis radio, unde angulus $PBD$ rectus. Idem eodem modo de angulo $PAD$ demonstratur.

34. Sit, *Fig. VI*, triangulum $PAB$ rectum in $A$, habens latus $AB$ quovis dato minus, dicanturq., $PB$: $p$, $AB$: $\frac{h}{m}$, radius: $r$.

Erit sinus anguli $APB$ quovis dato minor. Est enim $p:r::\frac{h}{m}:\frac{hr}{pm}$, seu sinum anguli $APB$, quod pariter ex Lem. 18. inferri posset.

35. Hujus conversum, exposito angulo $APB$ omni dato minori, ulteriori probatione non indiget.

36. Iisdem positis, hypothenusa $BP$ lateri $AP$ æqualis est. Cum enim sinus anguli $BPA$ sit $\frac{hr}{pm}$, erit sinus complementi illius seu anguli $ABP$ $\sqrt{rr-\frac{hhrr}{ppmm}}$, & juxta triangulorum

rum vulgarem dimensionem, $r : p :: \sqrt{rr - \frac{bbrr}{ppmm}}$ : AP, seu $\frac{p}{r}\sqrt{rr - \frac{bbrr}{ppmm}}$ seu $p$, per Lemm. 10.

37. Angulus A B P est æqualis angulo B A P, & uterque rectus; quod, cæteris perceptis, satis patet.

38. In dato quovis triangulo A B C, *Fig. VII*, si ex angulo B ad oppositum latus A C projecta B D abscindat D C, portionem quavis datâ minorem, ducaturque arculus circularis, seu ipsi æqualis recta D E juxta Lemm. 32, faciens B E æqualem B D; erunt D E & E C quavis datâ minores.

*Demonstr.* Habent enim respectu D C relationem, Lemm. 18, expressam.

39. Iisdem positis, si angulus A B D sit rectus; dico triangula A B D & D E C fore similia; juxta enim Lemm. 33. angulorum B D E & B E D uterque rectus est; quare D E C (I. 13. Eucl.) quoque rectus est, adeoque æqualis ipsi A B D ex hypothesi;

*Secundo*, ob angulum B D E rectum, erit E D C, anguli B D A complementum ad rectum; atqui (juxta I. 32. Eucl.) angulus B A D ejusdem B D A complementum est, unde E D C æqualis B A D, hinc & tertius A D B æqualis D C E, quare constat propositum.

40. Datis (*F. VIII.*) duabus curvis A B D, E F G, quo-

quovis modo mediantibus rectis EP, AP, FP, BP, ad punctum P relatis, si A B sit curvæ B A D pars omni datâ minor, erit & E F pars curvæ E F G omni datâ minor & contra; habent enim relationem Lemm. 18. expositam.

41. Sit recta B N, *Fig. IX*, indefinitè versus N protensa, ac ductâ ex puncto B ad angulum N B C recto majorem lineâ B C; $s$, ex cujus extremitate C projecta C A abscindat a rectâ B N portionem B A quavis datâ minorem: $\frac{b}{m}$; erunt (juxta 38. Lemm.) D B: $\frac{c}{m}$, tum A D: $\frac{d}{m}$, rectum angulum in D facientes singulæ quavis datâ minores; facta jam C E seu $\frac{f}{m}$ itidem quavis datâ minori, ductisque E F seu $h$ ipsi D B, & H E seu $k$ ipsi A B parallelis, quæritur harum ut & linearum F H: $l$, & F C: $g$, & H C: $n$, natura.

*Io*. quia C D æqualis C B, juxta Lemm. 36, est C B: C D:: C E: C F. Hoc est $s : s :: \frac{f}{m} : g$. adeoque $g$ seu C F $= \frac{f}{m}$ seu CE; unde C F infinitesima. *IIdo*. C B: C A:: C E: C H, seu $s : s + \frac{d}{m} :: \frac{f}{m} : n$: unde $s n = \frac{s f}{m} + \frac{d f}{mm}$, & per Lemm. 10. $n = \frac{f}{m}$, unde C H æquatur C E seu infinitesimæ. *IIItio*. C B: BD:: C E: E F, $s : \frac{c}{m} : \frac{f}{m} : h$. ergo E F seu $h = \frac{cf}{smm}$ seu (juxta Lemm. 10.) nihilo. *IVto*. C B: B A::

C E:

CE: EH. $s : \frac{b}{m} :: \frac{f}{m} : k$. ergo HE seu $k = \frac{bf}{smm}$ seu nihilo, Lemm. 10. Vto; CD: DA :: CF: FH, $s : \frac{d}{m} :: g$ seu $\frac{f}{m} : l$, unde FH seu $l = \frac{df}{smm}$ seu nihilo.

42. Quare liquet, retentâ eadem Hypothesi; lineas, *CE*; *CF*, *CH* sibi mutuo æquari, & *FE*, *EH*; *HF* nihilo æquipollere; adeoque omnes quantitates posterioribus hisce multiplicatas tutò ex calculo algebräico; una cum iisdem, deleri posse.

43. Sint quotlibet antecedentia, $c$, $d$, $f$, *&c*, totidemque consequentia $g$, $h$, $l$, *&c*; item exposita ratio in singulis constans, ut $r$ ad $s$, ut sit, $r : s :: c : g$. tum $r : s :: d : h$. nec non $r : s :: f : l$. & sic in cæteris; dico fore, ut $r$ ad $s$, ita omnia antecedentia $c + d + f$ *&c*. ad omnia consequentia $g + h + l$, *&c*. Hoc ex elementis notum est.

44. Iisdem positis, sint quantitates determinatæ, hoc est, quæ eandem continuo ac invariatam servent magnitudinem $r$, $s$, $b$, item aliæ indeterminatæ, $x$, $y$, $z$, $n$, sive tales, quarum magnitudo pro vario respectu, aut positione, varia est, licet eodem litterali signo perpetuò exprimantur, quale specimen omnibus notissimum in Algebräicâ locorum doctrinâ incognitæ dictæ quantitates exhibent; si fuerit in singulis, ut $r$ ad $s$, ita quælibet $x$ ad sibi relatum $y$, erit ex præ-

ce-

cedenti, ut $r$ ad $s$ ita quotlibet $x$, ad totidem $y$; seu (quod in posterum hoc modo enunciabitur) ita omnia $x$, ad omnia $y$.

45. Quin & assumptâ tertiâ determinatâ quantitate $b$, si fuerit $r : s :: x : y$. Cum sit quoque, $rb : sb :: x : y$. item $r : s :: bx : by$. tum & $rb : s :: bx : y$, nec non, $r : sb :: x : by$. erit quoque in singulis hisce analogiæ generibus eadem, ac in præcedenti, argumentandi methodus, ex Lem. 43. cum in singulis prima proportionis ratio sit constans & invariabilis.

46. Quod si assumantur quantitates indeterminatæ $z$ & $n$, fiatque, ut supra, $r : s :: x : y$. cum sit quoque $rz : sz :: x : y$. ac etiam $r : s :: xz : yz$. Item $rz : sz :: xn : yn$: erit, velut in duabus præcedentibus, ut, in primâ analogiæ ratione, antecedens ad consequens, ita, in secundâ, omnia antecedentia ad omnia consequentia; conclusionis fundamentum ex præcedenti & Lem. 43. manifestum est.

47. Quin & in omnibus Lem. 45 & 46 casibus, si in primâ proportionis ratione tot supponantur termini, quot in secundâ, erit, ut omnia antecedentia in primâ, ad omnia consequentia, ita omnia antecedentia in secundâ, ad totidem seu omnia consequentia.

Quod probatione speciali non eget, quippe ex præcedentibus sufficienter cognitum.

48. Sint

48. Sint duæ indeterminatæ quantitates $x$ & $y$, quæ ducantur in determinatam $r$, item aliam $s$; erit, ut omnia $rx$ ad totidem $ry$, ita omnia $sx$ ad totidem $sy$. Patet, cum omnia $x$ sint ad omnia $y$, ut omnia $x$ ad omnia $y$.

49. Hoc addam, licet ex modo monstratis facili negotio colligatur, si fuerit, $r : s :: x : y$. ac, assumtâ indeterminatâ $z$; fiat $rz : s :: zx : y$: argumentationem Lemm. 43. & 47. non procedere; seu licet per se analogia in singulis constet; non ritè colligi, ut omnia $rz$ ad omnia $s$. ita omnia $zx$ ad omnia $y$; cum ratio $rz$ ad $s$, propter ipsius $z$ magnitudinem variabilem, perpetuo non sit eadem, quod tamen juxta Lemm. 43. requiritur. Quæ observatio tyronibus admonitionis loco inservire potest, cum facilis admodum lapsus sit in hoc argumentandi genere.

*Ex Analysi assumo.*

50. *Multiplicationem* potestatum ab eâdem radice fieri per exponentium additionem; ut si ducendum sit $d^2$ in $d^3$, fore productum $d^{2+3}$, seu $d^5$; si $d^p$ in $d^q$ fore $d^{p+q}$.

51. Unde sequitur, si potestates sint æquales, hoc est $p = q$, fore productum $d^{2p}$; quod si denuo per $d^p$ multiplicetur, fiet $d^{3p}$, atque ita deinceps.

Quare

Quare si potestas $p$ alicujus radicis $d$, ut $d^p$, veniat quadratè, cubicè, qquadratè aliisque modis, multiplicanda, oportet potestatis datæ exponentem $p$ per numerum dignitatis quæsitæ multiplicare; sic quadratum ipsius $d^p$ est $d^{2p}$, cubus $d^{3p}$, qquad: $d^{4p}$, adeoque si $d^p$ ad potestatem $q$ evehi debeat, orietur $d^{qp}$.

52. Hinc jam ordine retrogado constat potestatum quarumlibet, per alias ejusdem radicis potestates *divisionem*, exponentium substractione peragi; sic $d^5$ per $d^2$ divisum exhibet quotientem $d^{5-2}$, seu $d^3$; adeoque $d^p$ per $d^q$ divisum efficit $d^{p-q}$; item $d^n$ per $r^c$ seu $\frac{d^n}{r^c}$ facit $d^n r^{-c}$.

53. Ipsamque radicum omnigenarum ex potestatibus quibuscunque extractionem fieri divisione exponentium; sic radix quadrata ex $d^2$ est $d^{\frac{2}{2}}$ seu $d$; cubica ex $d^3$ est $d^{\frac{3}{3}}$ seu $d$; ex $d^6$ est $d^{\frac{6}{3}}$ seu $d^2$.

Radix qquadr: ex $r r d^6$ est $r^{\frac{2}{4}} d^{\frac{6}{4}}$ seu $r^{\frac{1}{2}} d^{\frac{3}{2}}$, quod juxta vulgarem notationem hoc modo designatur $\sqrt{r d^3}$; tandem radix potestatis $q$ ex $d^n$ extracta erit $d^{\frac{n}{q}}$.

Quæ omnia ex divisionis, extractionisque radicum notâ methodo manifesta sunt.

## Scholium Generale.

Cum nullus existat numerus, qui inter progressionis Arithmeticæ: 1, 2, 3, 4, &c. terminos locum non inveniat; singuliq: hujus progressionis termini generentur ex progressionis monadicæ respectivis aggregatis; numerum quemlibet, sub specie summæ progressionis unitatum, considerari posse hoc ipso patet. Unde sequentes, & alicujus in hisce momenti, numerorum proprietates emergunt; nimirum.

I. Ubi unitatum hæc progressio *subsistit*, ipsarum aggregatum numerum constituit *determinabilem*, ac per monadicorum progressionem certo termino cessantem denotandum; verb: gr. 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 1 + 1, &c.

II. Ubi vero *nunquam subsistendo progreditur*, & in multitudinem terminorum omni determinabili majorem assurgit hæc progressio, aggregatum unitatum numerum constituit *omni dato majorem*: *m*, hac de causâ per progressionem monadicorum nunquam desinentem exprimendum; velut *m* = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 *& sic continuo absque cessatione pergendo.*

III. Certo termino subsistens monadicorum progressio, adeoque numerus determinabilis *aliquot progressionis unitates*; nunquam desinens progressio seu numerus omni determinabili major *omnes hujus progressionis unitates continet.*

IV. Numeri omni dato majoris essentialis proprietas, ac ratio formalis in perpetuo accretionis actu consistit, subsistendo enim numerum determinabilem efficeret (No I.)

V. Quare, si quantitas determinata *b* dividatur per numerum omni dato majorem, seu continuo crescentem, *m*, erit fractio $\frac{b}{m}$ quantitas continuo decrescens; manente enim numeratore, ac denominatore sine fine aucto, diminuetur sine fine fractio.

Unde infinitesimarum natura clarius illucescit, patetque ipsas, non in determinato quodam indivisibili, ut ut exiguo

exiguo, sed in quantitate, cujus ulterior diminutio actu continuo sine fine peragitur, consistere.

Quibus perceptis Analysi infinitorum in Geometria sine lapsus periculo utemur; cum nihil hic in continui divisibilitatem, & incommensurabilium asymmetriam, quibus scopulis allisa Indivisibilium Methodus naufragium passura videbatur, commissum sit.

VI. Possent & plura, ex progressionis infinitæ proprietate, circa numeros infinitos demonstrari: *Verb: gr:* si in monadicorum progressione singuli termini, seu unitates, ducantur in determinatam quandam quantitatem $\frac{pk}{r}$, erit, si terminorum quotitas aut multitudo sit $= m$, summa hujus progressionis $\frac{pk}{r} m$. In omni enim progressione æqualium, terminorum aggregatum quodlibet æquatur termino unico in quotitatem terminorum respectivam ducto, quod satis notum est.

VII. Patet hinc $m$ numerum *simpliciter* infinitum (hunc eum voco, qui oritur ex progressione infinitis quidem, sed meris unitatibus constanti) per quamlibet quantitatem $l$ multiplicatum aut divisum, exhibere numerum alius generis infinitum $lm$ aut $\frac{m}{l}$, qui ad primum $m$ determinatam habet rationem, ut $l$ ad unitatem, aut ut unitas ad $l$.

VIII. Quin & hinc apparet, quodvis infinitum $pm$, esse summam progressionis æqualium $p$, cujus terminorum quotitas infinita est seu $= m$; est enim,

$pm = p + p + p + p + p$ *& sic continuo absque cessatione pergendo.* juxta N. 6.

IX. Nec opus est, superioribus intellectis hoc effatum adstruere: omne scilicet infinitum in suo genere, analyticè efferri, per quantitatem determinabilem in $m$ seu numerum infinitum ductam; sic, $pm$, $km$, $ym$, $dm$, &c. sunt singulæ, sed sui generis, infinitæ quantitates.

X. Ex quibus consequitur, fore quantitatem cujuslibet

bet generis infinitam $km$ ad determinatam $r$, ut infinitesima $\frac{s}{m}$ ad nihilum geometricum, & e converso; est enim quarta proportionalis $\frac{s\,r}{k\,m\,m}$, quæ in re geometrica pro non quanto est habenda juxta Lemm. 10.

XI. Quare & quicquid per infinitesimam multiplicatum, per infinitum aliquod dividitur, nihilo æquivalet;

XII. Hinc si æquationis expositæ terminos quosdam infinitum aliquod multiplicaverit, aliique sint ex meris determinabilibus quantitatibus compositi; omnes termini infinito vacui ex æquatione poterunt, nihilorum ad instar, rejici; sumto enim $m$ pro numero infinito sit $myy+ly = pxx+mrx+nnm$.

Dico fore $myy = mrx+nnm$. Unde divisis per $m$ erit $yy = rx+nn$: rejectis terminis $pxx$ & $ly$, tanquam infinitum non continentibus.

*Demonstr.* Cum enim, existente ut supra, $ly+myy = pxx+mrx+mnn$, erit, bis factâ divisione per $m$, $\frac{yy}{m}$. $\frac{ly}{mm} = \frac{pxx}{mm} + \frac{rx}{m} + \frac{nn}{m}$, unde, per Lemma 10. rejectis rejiciendis, ac ductis omnibus in $m$, remanebit æquatio, $yy = rx+nn$, q: e: d.

XIII. Eodem modo probabitur ex qualibet æquatione omnes terminos per infinitum aliquod divisos, cæteris omni infinito sive multiplicanti sive dividenti immunibus, tutò posse rejici, totâ enim æquatione per $m$ divisâ, hi soli termini juxta Lemma 10. nihili ad instar considerari poterunt.

XIV. Tum & terminos per infinitum multiplicatos, rursumque per infinitum divisos, pro determinabilibus habendos, est enim $\frac{pm}{qm} = \frac{p}{q}$.

Hæc autem præsenti instituto sufficiant.

De

## CAP. I.

# *De Curvarum tangentibus.*

1. SIt curva *ADE*, cujus intercepta *AP* = *x*, applicata in dato quolibet angulo *EP*: *y*, ac ducenda sit recta *TE* curvam tangens in *E*;

Unde ex datâ curvæ æquatione inter applicatam *y*, interceptamque *x* constitutâ, quæritur *TE* seu *s*, aut hanc tangentem determinans *PT* seu *t*, quam axis portionem *PT*, applicatâ *EP*, & tangente *TE* interceptam, ex *Nob. Hugenii* instituto *subtangentem* vocabimus.

In linea *AQ* sumtâ *QP* infinitesimâ qualicunque $\frac{b}{m}$, erectâque *QD* ipsi *PE* parallelâ, ducatur *HD* æqualis & æquidistans ipsi *PQ*, quare triangula *TPE*, & *DHE* erunt similia, & $TP : PE :: DH : EH$ seu $t : y :: \frac{b}{m} : \frac{by}{tm} = EH$.

item $TP : TE :: DH : ED$ seu $t : s :: \frac{b}{m} : \frac{bs}{tm} = DE$.

Unde patet & ipsas *EH* & *DE* esse infinitesimas, cum per numerum omni dato majorem *m* sint divisæ, juxta Lemm. 7. Exponatur jam: curvæ quælibet æquatio $2rx - xx = yy$ inter *PE* & *AP* constituta, hæc eadem inter interceptam *AQ* seu $x - \frac{b}{m}$, & applicatam *DQ* seu

$y - \frac{by}{tm}$ ſtatuatur, ſeu quod eodem redit, in expoſitâ æquatione pro $x$ ponatur $x - \frac{b}{m}$, ac loco $y$ ſubſtituatur $y - \frac{by}{tm}$ (quod in poſterum vocabo *æquationem ad infiniteſimas redigere*) emerget alia æquatio hac formâ:

$$2rx - \frac{2rb}{m} - xx + \frac{2xb}{m} - \frac{bb}{mm} = yy - \frac{2byy}{tm} + \frac{bbyy}{ttmm}$$

Jam vero: (per Lemma 10.) deletis $\frac{bb}{mm}$ & $\frac{bbyy}{ttmm}$, utpote nihilo æqualibus, tum & terminis, qui datam æquationem componunt, cum ſibi mutuo æquentur, remanebit: $-\frac{2rb}{m} + \frac{2xb}{m} = -\frac{2byy}{tm}$, & diviſione facta per $\frac{2b}{m}$, ac mutatis ſignis $t = \frac{yy}{r-x} = TP$, quæ invenienda erat.

Quod ſi non $QP$, uti mox, ſed in lineâ $EP$ aſſumatur $EH$ infiniteſimi $= \frac{k}{m}$ erit ob triangulorum $TPE$, $DHE$ ſimilitudinem.

$EP : TP :: EH : DH$, ſeu $y : t :: \frac{k}{m} : \frac{tk}{ym} = DH$.

$EP : ET :: EH : ED$ ſeu $y : s :: \frac{k}{m} : \frac{sk}{ym} := DE$.

Unde redactâ æquatione modo expoſitâ ad infiniteſimas, ſeu loco $x$ & $y$ ſubſtitutis $AQ$ & $DQ$, ſive $x - \frac{tk}{ym}$ & $y - \frac{k}{m}$ orietur æquatio nova

$2rx - \frac{2rtk}{ym} - xx + \frac{2tkx}{ym} - \frac{ttkk}{yymm} = yy - \frac{2ky}{m} + \frac{kk}{mm}$. & rejectis (juxta Lem. 10.) rejiciendis, iisque quæ se mutuo ex naturâ æquationis tollunt, fiet $-\frac{2rtk}{ym} + \frac{2tkx}{ym} = -\frac{2ky}{m}$, & reductâ æquatione $t = \frac{yy}{r-x}$, eadem cum modo inventâ.

2. Si vero curvæ proprietas hoc flagitet, poterit & ipsa $DE$, seu tangentis aut, juxta Lemm. 25, curvæ ipsius portio, infinitesimæ loco assumi;

Sit, verbi gratia, expositæ curvæ hæc relatio, ut, vocatâ curvæ portione $AE : z$, sit continuo $zz = rx + yy$, & designanda sit recta curvam tangens in $E$; quapropter assumtâ $DE = \frac{l}{m}$: erit, per modo monstrata

$TE : EP :: DE : EH$, seu, $s : y :: \frac{l}{m} : \frac{ly}{sm} = EH$.

$TE : TP : DE : DH$ seu, $s : t :: \frac{l}{m} : \frac{lt}{sm} = DH$.

Unde reductâ hac æquatione ad infinitesimas, hoc est, loco rectarum $AP$, $PE$ & curvæ $AE$ ad æquationem adhibitis rectis, $AQ = x - \frac{lt}{sm}$, & $QD = y - \frac{ly}{sm}$, nec non curva $AD = z - \frac{l}{m}$ orietur æquatio.

$$zz - \frac{2lz}{m} + \frac{ll}{mm} = rx - \frac{rlt}{sm} + yy - \frac{2lyy}{sm} + \frac{llyy}{ssmm}$$

Quæ, rejectis per Lemm. 10. rejiciendis, ac terminis se mutuo tollentibus, nec non divisione per $\frac{l}{m}$ institutâ remanebit reductâ æquatione,

$$t = \frac{2zs - 2yy}{r}$$

Ex quâ æquatione sublatâ $s$ aut $t$, per æquationem $tt + yy = ss$ (quæ triangulo rectangulo $EPT$ ortum suum debet, quod si obliquangulum foret, aliam æquationem exhiberet.)

Tum & loco ipsius $z$ substituto valore ex æquatione curvæ datâ $zz = rx + yy$ eliciendo, orietur $ttrr + 4tryy = 4ttrx + 4ttyy + 4rxyy$, & cognita erit ipsa $t$ ex solis rectis $x$ & $y$.

3. In transitu noto, curvarum æquationes, quæ alioqui sine curvæ suppositâ longitudine exprimi posse non videntur, tangentes nihilo minus exhibere solis lineis rectis explicabiles; adeoque, si ipsius $t$ aut $s$ valor aliunde per lineas rectas significari posset, mechanicarum Cartesii plurimas, si non omnes, ad totidem Geometricas hac ratione reducibiles existere.

Hoc saltem liquet, modo dictas æquationes, per solas rectas naturâ suâ designabiles esse. Æquatio enim curvæ inibi discussæ $zz = rx + yy$, quæ ipsam curvam $z$ comprehendit,

æqua-

æquationem aliam huic curvæ propriam, ad tangentem determinatam producit; $ttrr + 4tryy = 4ttrx + 4ttyy + 4rxyy$, in quâ cum $t$ seu $PT$ sit recta, nullæ nisi rectæ reperiuntur; unde denuo si $t$ posset tolli per aliunde conquisitam æquationem solas rectas continentem (quod, cum $PT$ seu $t$ sit recta, impossibile non erit) emerget curvæ æquatio Geometrica, sed de his alibi.

*Scholium I.* Notetur velim, in exposito curvilineo $APE$ liberum esse quamlibet ex lineis, $DH$, $HE$, $ED$. pro primâ infinitesimâ adhibere, quoniam cæteræ ex triangulorum $TPE$, $DHE$ similitudine, & laterum analogiâ sponte fluunt; tum & primam infinitesimam $\frac{b}{m}$ aut $\frac{k}{m}$, aut $\frac{l}{m}$ ex supponentis arbitrio, in omnibus curvæ punctis vel semper sibi constantem ejusdemque perpetuo magnitudinis, (ut si $b$ aut $k$ aut $l$ ponantur æquales determinatæ cuidam $r$, unde $\frac{r}{m}$ sibi perpetuo æquabitur.) Vel variatâ continuis incrementis decrementisve quantitate mutabilem assumi posse, veluti, si $k$ æqualis $y$ supponatur, aut $b$ ipsi $t$, unde $\frac{y}{m}$ aut $\frac{t}{m}$ item $\frac{l}{m}$ pro variâ ipsius $y$ aut $t$ aut $l$ magnitudine variabitur.

Adeoque & in genere hinc consequi, pro tangentis inquisitione, beneplacito cujusvis relinqui, num applicatam $EP$, an interceptam $AP$ quin & ipsam curvam $ADE$, in partes infinitesimas æquales vel inæquales, divisam esse supponere velit; nisi certam quandam ac definitam infinitesimarum limitationem, ex curvæ

væ rectarumve naturâ aut aliunde ortam, respicere necessarium sit.

Hæc præcedentibus ritè perceptis probatione non egent, alioquin ex Axiom: II. immediate profluentia.

*Schol. II.* Ne vero continuis fractionum tricis implicitus impediatur calculus, aliâ in posterum infinitesimarum nomenclaturâ compendium venabimur, ipsam *QP* seu *DH* : *e*, *EH* : *a*. *DE* tangentis aut si mavis (juxta Lemm. 25.) curvæ portionem. *u*, appellantes, quod & in seqq:, ni secus moneatur, perpetim obtinebit, ubi, solâ *y* exceptâ quam ordinatæ designationi reservamus, infinitesimas quascunque per vocales, aut Græcas litteras denotabimus.

4. Sit igitur curvæ cujuslibet naturam, per lineas *AP* seu *x* & *PE* seu *y* exprimens æquatio ita ordinata, ut omnium terminorum summa nihilo æquivaleat: Verb: Gr: $x^3 + yxx + lx - y^3 - yyx - ky - s = 0$, oportet ei tangentem designare.

5. Reducatur hæc ad lineas *AQ* & *QD*, quæ infinitesimas involvunt, hoc est, ponatur *AQ* seu $x - e$ loco *AP* seu *x*, item *QD* seu $y - a$ loco *y* seu *PE*; constitutâque juxta curvæ datam proprietatem æquatione, orientur:

Pro $x^3$, terminus, $x^3 - 3exx + 3eex - e^3$.
$+yxx$ $\qquad yxx - 2eyx + yee$.
$\qquad\qquad - axx + 2aex - aee$.

+lx

$+lx$ , $lx - le$.

$-y^3$ $\quad -y^3 + 3ayy - 3aay + a^3$.

$-yyx$ $\quad -yyx + 2ayx - aax$.

$\qquad + eyy - 2aey + aae$.

$-ky$ $\quad -ky + ka$.

$-s$ $\quad -s$.

6. In ortâ jam hac æquatione primum tollendi veniunt omnes termini, ubi nec *a* nec *e* reperitur; quoniam omnium summa nihilo æqualis est, quippe datam æquationem constituentium. Unde & hoc manifestum est, nullum æquationis curvæ terminum, ipso *x* & *y* vacuum, in ortâ æquatione reservari posse.

7. Tum singuli deleantur termini, ubi ipsorum *a* aut *e* potestas aut rectangulum invenitur, quippe, (per schol: 2. §. 3. & Lemm. 10.) pro non quantis aut pro nihilo habendi; unde in æquatione ortâ, ii tantum remanebunt termini, qui vel *a* vel *e*, sed unius dimensionis, continent; restabitque, deletis delendis, $-3exx - 2eyx - axx - le + 3ayy + 2ayx + eyy + ka = 0$. & æquatione in analogismum resoluta:

$3yy + 2yx + k - xx : 3xx + 2yx + l - yy :: e : a$.

8. Jam vero, cum ex constructione similia sint triangula *DHE* & *TPE*, est *HD*: *EH*:: *TP*: *PE*. seu $e : a :: t : y$.

Quare

Quare & ex §. 7, $3yy + 2yx + k - xx : 3xx + 2yx + l - yy :: t : y$. Unde reducta æquatione obtinebitur æquatio ad tangentem: $3y^3 + 2yyx + ky - xxy = 3xxt + 2yxt + lt - yyt$.

Hinc & in æquatione §. 7, remanenti pro *a* ipsum *y*, pro *e* ipsum *t* reponendum esse constat; simulque Eruditissimi *Barovii* methodus in aperto posita est.

9. Notari velim, omnes curvarum æquationes duplici terminorum genere componi; quorum primum (seclusis ab hac consideratione quantitatibus *l*, *k*, *s*, quæ pro cognitis habentur) vel solis *x* aut *y*, earumque potestatibus constat: ut $y^3$, $ky$, $x^3$, $lx$. quos terminos in posterum *simplices* nominabimus: Alterum autem terminorum genus ex ipsis, *x* in *y* ductis conflatum est, ut $yxx$, $yyx$, & hos propterea *mixtos* dicemus.

10. Tum & observare licet, ex singulis æquationis Curvæ terminis simplicibus, singulos tantum huic servientes æquationi terminos oriri.

Cum enim potestates ipsarum *y* & *x*, per radices, $y - a$, & $x - e$, juxta §. 5. exprimendæ veniant, positâ ipsarum *y* aut *x* potestate maximâ, (ut in æquationibus vulgo ordinandis fieri solet) pro primo potestatis termino, solus secundus remanebit; primo siquidem per §. 6, re-

reliquisque post secundum per §. 7, evanescentibus.

11. Quinetiam terminum ex simplici solum $y$ continenti ortum, esse eundem æquationis curvæ terminum, per numerum dimensionum ipsius $y$ multiplicatum.

Sit enim in æquatione curvæ terminus $y^c$ (posito $c$ pro potestatis ipsius $y$ exponente) ac pro $y$, juxta §. 5, acceptum $y-a$ si ad potestatem $c$ evehatur, remanebit, per §. 10, solus secundus $-cay^{c-1}$, &, juxta §. 8, $y$ ipsi $a$ substituto, erit terminus ortus $-cy^c$ ex simplici $y^c$.

12. Item, terminum interceptam $x$ concernentem, ex simplici ortum, esse eundem æquationis datæ terminum per respectivum dimensionum ipsius $x$ numerum multiplicatum; ita tamen ut postea unicâ ipsius $x$ dimensione multetur, ac eidem $t$ sufficiatur.

Siquidem in potestate, cujus exponens $b$, à radice $x-e$, secundus terminus est $-bex^{b-1}$, &, per §. 8, mutato $e$ in $t$, erit terminus ortus $-btx^{b-1}$ ex simplici $x^b$.

13. Signa terminorum in utrâque æquatione, tum curvæ, tum ad tangentem, sunt eadem, cum enim, §. 10, non nisi secundi potestatum termini æquationem ad tangentem ingrediantur, istique, in radicibus binomiis

$y$

$y - a$, $x - e$, signo $-$ copulatis, contrario signo ac primi afficiantur, tota æquatio comparebit sub signis æquationi ad curvam contrariis; unde mutatis omnibus, (quod salvâ æquatione fieri posse tyronibus notum est) utraque æquatio hoc in casu, (de cæteris quilibet facile judicabit) iisdem signis in respectivis terminis affecta esse videbitur.

14. Hinc regula tangentes ducendi oritur, cum curva æquationem habet terminis simplicibus constantem, Ex: Gr: data sit curvæ æquatio, $y^4 - sy^3 + ky - x^4 + lxx - mx + n = o$ quæ ordinetur, ut omnes $y$ â sinistrâ, omnes $x$ à dextra inveniantur, erit $y^4 - sy^3 + ky = x^4 - lxx + mx - n$, unde, juxta §. 11, 12, 13, singulis terminis per ipsarum $y$ & $x$ dimensionum numerum multiplicatis, ac unicâ $x$ in $t$ mutatâ exsurget æquatio ad tangentem.

$$4y^4 - 3sy^3 + 1ky = 4x^3t - 2lxt + mt.$$

15. Jam vero terminos mixtos considerantibus, apparet ex singulis terminis mixtis binos pro æquatione ad tangentem terminos oriri; sit enim terminus mixtus $y^c x^b$, & $c$ ac $b$ potestatum ipsarum $y$ & $x$ exponentes, oriuntur ex $y^c$, juxta §. 7, terminis $y^c - c a y^{c-1}$, item ex $x^b$ termini $x^b - b e x^{b-1}$, qui in se mutuo

mutuo ducti, deletis ex §. 6. & 7. delendis, dabunt pro $y^c x^b$ duos terminos $-cay^{c-1} x^b - bex^{b-1} y^c$ hoc est per §. 8. $-cy^c x^b - bex^{b-1} y^c$.

16. Hos terminos ita esse affectos statim videtur, ac si, ordinatâ æquatione, ut §. 14, idem terminus $y^c x^b$ sub contrario signo ab utraque æquationis parte reperiretur; & à parte sinistrâ solâ $y$, à parte dextrâ sola $x$ considerata fuisset; legesque §. 11. & 12. respectivè subiissent.

Quod etiam contrariis signis, si ab oppositis æquationis partibus statui intelligantur, affecti sint, patet ex §. 15, ubi uterque terminus sub eodem signo oritur, in reducendâ autem æquatione, ut §. 14, termini $x$ continentes ad oppositas partes rediguntur, ac illi, quibus $x$ exulat, unde & ad contraria signa; quod satis notum est.

17. Quare hinc tandem emergit tangentes hujuscemodi expedita admodum ducendi methodus, sive simplicibus, sive mixtis terminis æquatio curvæ constiterit.

I°. Ordinetur æquatio curvæ, ut omnes termini sive simplices sive mixti, in quibus $y$ seu applicata reperitur, á sinistrâ conspiciantur, rejectis, per §. 6, quotquot adfuerint, nec $y$ nec $x$ continentibus terminis.

III°. Om-

IIo: Omnes termini, quos $x$ intercepta ingreditur, statuantur ad dextram, adeoque omnes termini mixti $y$ & $x$ simul continentes, juxta §. 15. & 16, ab utrâque parte æquationis sub contrariis signis videbuntur.

IIIo. Singuli ad sinistram positi in numerum dimensionum ipsorum $y$ respective ducantur; §. 11. & 16.

IVo. Singuli à dextra per numerum ipsorum $x$ respective multiplicentur; at unicâ ipsius $x$ dimensione multati ducantur in $t$, §. 12. & 16.

Et habebitur, ex datâ cujuslibet curvæ æquatione inter applicatam & interceptam constitutâ, æquatio ad tangentem determinata, Ex: Gr: ex datâ curvæ æquatione, §. 4, $x^3 + yxx + lx - y^3 - yyx - ky - s = o$, erit juxta No. I. $y^3 + yyx - yxx + ky$ æquationis pars sinistra, & $x^3 + yxx - yyx + lx$ pars dextra, unde & hac facie apparebit æquatio $y^3 + yyx - yxx + ky \square x^3 + yxx - yyx + lx$, &, per No. III. & IV, singulis $x$ & $y$ in respectivum dimensionum numerum ductis, at à dextrâ $x$ in $t$ mutato, fiet æquatio ad tangentem: $3y^3 + 2yyx - yxx + ky = 3xxt + 2yxt - yyt + lt$, ut supra.

18. Quæ autem de figuris versus axem concavis demonstravimus; aliis versus axem convexis quivis applicabit, ac, si facto $AQ : x$, & $QP$:

*QD* : *y*, fiat *AP* : $x+e$, & *PE* : $y+a$, eandem redituram æquationem, facile animadvertet.

19. Cum autem termini simplices ad paraboloides, mixti ad hyperboloides, commodè referri posse videantur; utriusque tangentem exempli loco per inventum modo canonem definiemus. Sit paraboloides; ejusve complementum cujus æquatio $y^p = r^{p-q} x^q$; erit $t = \frac{p y^p}{q r^{p-q} x^{q-1}}$ $= \frac{px}{q}$, applicatâ fractione ad curvæ æquationem.

Sit hyperboloides cujus æquatio $y^p x^q = s^p r^q$; erit hæc per §. 17, ordinata: $y^p x^q \square - y^p x^q$ & $t = \frac{p y^p x^q}{-q y^p x^{q-1}} = -\frac{px}{q}$. Signum autem negativum hic innuere, ipsam $t$ ab alterâ parte ipsius applicatæ respectu $x$ sumendam esse; cuivis notum est.

20. Nec terminos tantum rationales, integrosque deposcit hæc methodus; verum & sese ad quoslibet surdos fractosque extendit.

Sit verbi gratia exposita curvæ æquatio; $\frac{y^6}{r^3} + y\sqrt{rx^3} + \sqrt{C\,\frac{r^7 x^4}{yy}} = x^3 + r^3$. Oportet ei subtangentem designare.

Quem in finem, juxta Lemm. 50, &c. hoc modo denotetur æquatio.

$y^6 r^{-3} + y r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{7}{3}} x^{\frac{4}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = x^3 + r^3$. erit æquatio ipsam subtangentem $t$ manifestans

$6 y^6 r^{-3} + y r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} y r^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} t - \frac{2}{3} r^{\frac{7}{3}} x^{\frac{4}{3}} y^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} r^{\frac{7}{3}} x^{\frac{1}{3}} t y^{-\frac{2}{3}} = 3xxt.$

seu reductâ denotatione ordinariâ

$\frac{6y^6}{r^3} + y\sqrt{r x^3} + \frac{3}{2} y t \sqrt{r x} - \frac{2}{3} \sqrt{C} \frac{r^7 x^4}{yy} + \frac{4}{3} t \sqrt{C} \frac{r^7 x}{yy}$

$= 3xxt.$

Consequentiæ ratio, quantitatum surdarum fractarumque designationem Lemm. modo citatis expositam intelligenti, obscura non erit.

21. Hac datâ occasione sequentem observatiunculam intertexere liceat. Expositâ nimirum quotlibet dimensionum æquatione ita constitutâ, ut unum terminum ex merâ ipsius $y$, alterumque ex eadem ipsius $x$ potestate constantes habeat, cum terminis mixtis quotlibet intermediis, in quibus summa dimensionum ipsorum $y$ & $x$ semper maximam ipsius $y$ vel $x$ potestatem æquat: dico, quovis etiam numero aut signo singuli afficiantur termini, perpetuo $t$ fore æqualem ipsi $x$:

detur enim æquatio, $2y^4 + 3xy^3 - 5xxyy + 7x^3y = 6x^4$ erit per superiora $8y^4 + 9xy^3 - 10xxyy + 7x^3y = 24x^3t + 10yyxt - 3y^3t$

— 21

$-21yxxt$, & applicatâ curvæ æquatione, factoque $8y^4 = 24x^4 + 20xxyy - 12xy^3 - 28x^3y$ erit, reposito hoc valore in locum ipsius $8y^4$, ac divisione institutâ, $t = x$. demonstrationem non addo, levi negotio; potestatum symbolis generalioribus adhibitis, ex præcedentibus eruendam.

22. Sit jam, *Fig. X*, curva *ADE*, cujus pars *AD* vocetur: $z$, intercepta *AQ*: $x$, applicata *DQ*: $y$. hujusque proprietatem exprimens æquatio sit $zzy^3x^4 = r^9 + ppy^5zz$, oportet ei tangentem ducere. Quare posito pro $z$ ipso $z + u$, pro $y$ ipso $y + a$, pro $x$ ipso $x + e$, redigatur ad infinitesimas, &, deletis juxta superiora delendis, orietur $4zzy^3x^3e + 3zzx^4yya + 2y^3x^4zu = 5ppzzy^4a + 2ppy^5zu$. Cumque ob triangulorum *TQD* & *DHE* similitudinem, appellatis tangenti *TD*: $s$, subtangenti *TQ*: $t$, fit $u = \frac{se}{t}$ item $a = \frac{ye}{t}$, emerget, hisce valoribus ipsorum $u$ & $a$ loco in æquatione surrogatis, ac divisione per $\frac{e}{t}$ institutâ, æquatio ad tangentem $4zzy^3x^3t + 3zzy^3x^4 + 2zsy^3x^4 = 2ppy^5zs + 5ppy^5zz$ Potuisset & regula §. 17, proposita ad hujus generis curvas extendi, nisi aliam occasionem inter sequentia præstolari maluissemus.

 23. Quid-

23. Quomodo etiam *Fig. X.* ex datis curvarum tangentibus earum perpendiculares inveniantur, & vice versâ, abunde constat. Siquidem, retentis §. 1, symbolis, si fiat $QS: l$, est ob angulum $TDS$ rectum $TQ: QD :: QD : QS$. seu $t: y :: y: l$.

Sed & quomodo a priori, non suppositâ tangentis cognitione inveniantur, breviter ostendam. Ob angulum $TDS$ rectum triangula $DHE$ & $DQS$ sunt similia, adeoque $DQ: QS :: DH: EH$: seu $y: l :: e: a$. Unde datâ æquatione curvæ, eaque reductâ ad analogismum ut in §. 7, ad inventionem normalium pro $e$ ipsum $y$, pro $a$ ipsum $l$ reponendum esse clarum est, videantur de hisce §. 7 & 8.

24. Et hactenus de ducendis tangentibus perpendicularibusque, ex datâ curvæ æquatione inter applicatam $y$ & interceptam $x$ constituta. Sequentibus autem exemplis, quomodo ex data relatione inter duas diversarum curvarum applicatas, ac alterutrius tangenti, alterius tangens innotescat, exhibebimus. Ubi monuero methodum generaliorem in his & cæteris fere cunctis hujus naturæ problematis, in eo consistere, ut tot numero inveniantur æquationes, quot assumtæ fuerint infinitesimæ, ut, his per reductionem ejectis quæsitum fiat manifestum.

25. Sint *Fig. XI.* duæ curvæ, $ADE$, quam tangut recta $TD$; item alia curva $ANK$ ad eundem axem posita; dataque sit relatio inter utriusque applicatas $DQ$ & $QN$; oportet ducere rectam $LNK$ tangentem curvam $ANK$ in $N$.

Sit $AQ:x$, $QD:y$, $TQ:t$, infinitesimæ $QP = DH = NI:e$, $EH:a$, erit $EP = y+a$, $AP = x+e$, (quæ symbola in sequentibus, ubi curva iisdem majusculis distincta reperitur, ni aliud insinuetur, perpetuo obtinebunt.)

Sit item $QN:z$, infinitesima $IK:o$ erit: $PK = z+o$; $r$ sit linea cognita, $LQ$ subtangens quæsita $= k$.

Cum ergo hic assumtæ sint tres numero infinitesimæ, $a$, $e$, $o$, totidem inveniendæ erunt æquationes, quarum prima: $ye = ta$, quia $t:y::e:a$; secunda: $ze = ko$, quia $k:z::e:o$; unde ex utraque, $e = \frac{ta}{y} = \frac{ko}{z}$, seu $\frac{tza}{ky} = o$, tertiam ipsa curvarum relatio suppeditabit.

26. Sit igitur, in exemplum, $yy - zz = rr$. quâ æquatione ad infinitesimas reductâ, positoque pro $y$ ipso $y+a$, & loco $z$ ipso $z+o$, orietur $yy + 2ay + aa - zz - 2oz - oo = rr$, &, rejectis juxta §. 6 & 7, rejiciendis, $ay = oz$, unde $o = \frac{ay}{z} = \frac{tza}{ky}$ ex præcedenti, quare $k = \frac{tzz}{yy} = LQ$.

notetur hoc in casu, quia $\frac{y}{t} = \frac{zz}{k}$, lineas $QS$, & $QF$, si $DS$ & $NF$ sint respectivis curvis normales, in utrâque esse æquales.

27. Sit ex datâ curvarum relatione rectangulum $DQN$ æquale quadrato lineæ $r$, seu $yz = rr$. quæ æquatio per infinitesimas expressa dabit $yz + yo + az + ao = rr$, hoc est per §.6, & 7, $q = -\frac{az}{y} = +\frac{tza}{ky}$ juxta §. 25, seu $k = -t$. ex quo signo negativo apparet $k$ & $t$ ad diversas applicatæ $NQ$ partibus statui oportere, & curvam $ANK$ invertendam. Quod hic, ne figuras multiplicaremus, nos negleximus; & quivis, ubi casus hoc requirit, in sequentibus ex calculo facile supplebit.

Notetur, si $y$ ponatur ad quamlibet parabolam, ut sit $y^p = r^{p-q}x^q$, fore $z$ ad quamlibet hyperbolam, cujus æquatio $z^p x^q = r^{p+q}$.

28. Detur rursus curvarum relatio $y^p = r^{p-q}z^q$, erit æquatione ad infinitesimas reductâ deletisque delendis §. 6, & 7, $pay^{p-1} = qr^{p-q}z^{q-1}o$, quæ ducta in $yz$ dabunt $pay^pz = qr^{p-q}z^qyo$, & divisis per $y^p = r^{p-q}z^q$, erit: $\frac{paz}{qy} = o = \frac{tza}{ky}$ juxta §. 25, adeoque $k = \frac{qt}{p}$.

29. Hinc, si omnis generis Cissoidalium tangentes quis desideret, fiat curvarum relatio,

$yz = xx$, quæ juxta præcedentia dabit: $yo + za = 2ex$; fiunt autem ex §. 25, $a = \frac{ye}{t}$, $o = \frac{ze}{k}$, quibus in locum $o$ & $a$ suffectis oritur $\frac{yze}{k} + \frac{yze}{t} = 2ex$, factoque $yz = xx$, & divisis per $xe$, fit $\frac{x}{k} + \frac{x}{t} = 2$. seu $tx + kx = 2kt$, aut $\frac{tx}{2t - x} = k$. Unde, cum $y$ possit poni ad quamvis curvam, omnium Cissoidalium tangentes unâ operâ determinantur, quacunque ex curvâ ortum traxerint.

30. Sit *Fig. XII.* curva $ADEF$, ac symbola quæ §. 25, hoc tantum discrimine, quod $QO$ hic dicatur: $x$; item alia curva $ANKG$, quam tangat recta $NR$; voceturq: $RL$: $t$; sintq: $KM$, $LN$, $AO$ parallelæ, quæritur ipsius $RL$ longitudo, si detur æquatio curvæ $AEF$ $r^p - x^p = y^p$, & utriusque curvæ relatio $y^s = r^{s-q} z^q$.

Cum sit primò $RL : LN :: KI : IN$. seu $t : x :: o : e$. erit $\frac{xo}{t} = e$. secundo constitutâ curvæ $ADEF$ æquatione inter $OP$ & $PE$, seu inter $x - e$ & $y + a$, fiet $x^{p-1} e = y^{p-1} a$, quæ ad mox inventam æquationem applicita dabit $ty^{p-1} a = x^p o$. tertio, si æquatio mutuam curvarum relationem exprimens eodem modo tractetur, emerget, $sy^{s-1} a = q r^{s-q} z^{q-1} o$,

quæ duæ ultimò conquisitæ æquationes quæsitam exhibebunt $sy^{s-1}x^{p} = tqr^{s-q}z^{q-1}y^{p-1}$. Quod si fiat $q = 1$, & æquatio hæc per datas curvarum æquationes divisionis ope debitè reducatur, fiet $t = sy^{s-p}r^{p+1-s} - sz$; & facto $p+1 = s$ erit $t = sy - sz$.

NB. si $s$ ipso $p+1$ majus supponatur, quantitas $sy^{s-p}$ per $r^{s-p-1}$ dividenda erit, quod ex Lemm. 50, &c. satis cognitum est.

31. Sit *ADEO* semicirculus, *Fig. XIII.* N°. 1. cujus diameter $AO:r$; curva vero *AKG* sit Cissöis, quam tangat recta *NR*, quæritur *RL* seu $t$.

Sint eadem, quæ §. 25, symbola, ac $QO = r - x$ vocetur $l$, erit $AP = x + e$ & $PQ = l - e$; jam primo $RL : LN :: KI : IN$. seu $t : l :: o : e$, unde $o = \frac{te}{l}$, & cum ex proprietate circuli sit $lx = yy$, si loco $x$ ipsum $x + e$, loco $l$ ipsum $l - e$, loco $y$ ipsum $y + a$ sufficiatur, emerget $le - xe = 2ay$. tertiò æquatio Cissöidis $xx = zy$ dabit $2ex = yo + za$. tandem æquationibus $lx = yy$ & $zy = xx$ ad $x$ reductis orietur, $lz = xy$. ex quibus $t$ hoc pacto investigatur, quia $o = \frac{te}{l} = \frac{2xe - za}{y}$ erit $tye = 2lxe - lza$, unde, factis ut supra $lx = yy$ & $lz = xy$, divisisque omnibus per $y$, fiet $a = \frac{2ye - te}{x} = \frac{le - xe}{2y}$ juxta

mox

mox inventa, quâ æquatione ordinatâ, & substituto loco $xx$ ipso $zy$, ac pro $lx$ ipso $yy$ emerget $t = \frac{3}{5}y + \frac{1}{5}z = LR$. quæ constructionem omnium, ni fallor, expeditissimam admittit, sumendo nimirum, $RL$ æqualem $\frac{2}{3}DQ + \frac{1}{3}QN$.

32. Hoc etiam fonte manat singularis ac utilissima methodus tangentes ducendi, quæ nec quantitates surdas quomodolibet compositas, nec fractiones moratur.

Ex: Gr: sit *Fig. XI.* curva $ADE$, cujus intercepta $AQ : x$, applicata $DQ : y$, & æquatio hujus proprietatem exprimens $\sqrt{Crrx+y^3} - \sqrt{rr+xx} = y$. & huic tangens sit designanda.

Quem in finem quælibet quantitas surda statuatur æqualis alteri cuidam assumtæ, fiatque $\sqrt{Crrx+y^3} = f$ & $\sqrt{rr+xx} = z$, quæ vocentur idcirco *æquationes assumtæ*, concipianturque totidem curvæ, $ACG$, $ANK$, ad eundem axem $AQ$ esse descriptæ, quarum applicatæ sint assumtis quantitatibus æquales; nimirum $CQ = f$, & $QN = z$; unde æquatio curvæ expositæ $ADE$ erit $f - z = y$, quæ vocetur *æquatio ex assumtis orta.* Tandem cuilibet indeterminatæ sua tribuatur infinitesima, ponendo loco $AQ : x$, ipsam $AP : x + e$; loco $DQ : y$, ipsam $EP : y + a$; loco $CQ : f$, ipsam $GP : f + o$; denique loco $QN : z$, ipsam $PK : z + i$;

existentibus, $QP$, $EH$, $GM$, $IK$, seu $e$, $a$, $o$, $i$ infinitesimis. Emergetque, juxta superius tradita, æquatio ad infinitesimas reducta, $f + o - z - i = y + a$, & deletis delendis, ex §. 6, $o - i = a$.

Ex qua sublatis infinitesimis invenietur curvæ expositæ subtangens $TQ$ seu $t$.

Hoc autem duplici modo effectum dari potest, quorum uterque examinari quodammodo meretur.

*Primus modus* in eo consistit, ut, præter æquationem $ta = ye$ expositæ curvæ ordinariam, æquationes assumtæ omnes ad infinitesimas redigantur; & ope harum infinitesimæ ex æquatione ex assumtis ortâ, ad infinitesimas tamen prius reductâ, auferantur.

Sic assumta æquatio prima fuit $rrx + y^3 = f^3$, quæ ad infinitesimas redacta exhibebit $o = \frac{rre + 3yya}{3ff}$.

Secunda assumta æquatio, $rr + xx = zz$, dabit simili modo tractata $i = \frac{xe}{z}$.

Quibus valoribus in æquatione $o - i = a$ repositis, orietur $\frac{rrze - 3ffxe}{3ffz - 3yyz} = a = \frac{ye}{t}$ ex æquatione modo inventâ, unde emergit quæsita subtangens $t = \frac{3ffzy - 3y^3z}{rrz - 3ffx}$.

Se-

*Secundus* hoc idem efficiendi *modus* fit per assumtarum curvarum $ACG$ & $ANK$ subtangentes $RQ$ & $LQ$, quæ singulæ suas æquationes, pro tollendis ex æquatione ex assumtis ortâ infinitesimis, conferunt.

Cum enim sit in curvâ $ADE$, $t:y::e:a$, seu $ye = ta$; erit eadem ratione, positâ $RQ = k$, in curvâ $ACG$, $RQ:CQ::CM:MG$ seu $k:f::e:o$, unde $fe = ko$; nec non in curvâ $ANK$, positâ $LQ = h$, erit, $LQ:QN::NI:IK$ seu $h:z::e:i$, unde $ze = hi$.

Hinc invenitur, $a = \frac{ye}{t}$, & $o = \frac{fe}{k}$, nec non $i = \frac{ze}{h}$, quibus jam valoribus loco, $i$, &, $o$, & $a$, in æquatione $o - i = a$ substitutis, emerget $\frac{fe}{k} - \frac{ze}{h} = \frac{ye}{t}$; adeoque post debitam reductionem $t = \frac{ykh}{fh - zk}$.

Quin & circa utrumque hunc modum observatu dignum erit, secundum, uti primo magis compendiosum, ita & generaliorem esse: cum enim primus, per ipsas curvarum proprietates suâ naturâ determinatus, non nisi curvæ $ADE$ inserviat; secundus infinitarum curvarum, pro variâ ipsarum $y$, $f$, $z$, ad $x$ relatione casus comprehendit, levi negotio ad quamlibet curvam particularem determinabilis, si loco subtangentium

tium $h$ & $k$, valores juxta primum, quem dedimus, modum inventi, sufficiantur; hos enim valores ex datâ curvarum, quas respiciunt, proprietate etiam datas esse, præcedentia intelligenti satis manifestum erit.

33. *Ex: II.* Assumtâ eâdem *Fig. XI.* vocetur $AD$ curva perpetuo $c$, cujus infinitesima $DE$ sit $u$; dicaturque ipsius tangens $TD: s$; & manentibus iisdem, quæ in præcedenti exemplo, symbolis, æquatio illius relationem exprimens sit. $\sqrt{C \frac{r^4 c^4}{yy + rx}} + \sqrt{\frac{rrc^4 + yyx^4}{cc + xx}} = yy + rc$ oportet ei tangentem designare. Cum vero hic fractiones occurrant & termini insuper irrationales, varii sunt modi, quibus intentum assequi valemus, juxta varias quantitatum assumtiones. Sic assumto integro termino $\sqrt{C \frac{r^4 c^4}{yy + rx}} = ff$, item alio $\sqrt{\frac{rrc^4 + yyx^4}{cc + xx}} = zz$, erit æquatio ex assumtis orta $ff + zz = yy + rc$; quæ ordinata, ut supra, ad curvas respectivas, & reducta ad infinitesimas dabit $2fo + 2zi = 2ya + ru$. Unde sublatis per curvarum proprietates infinitesimis positoque $u = \frac{se}{t}$ (est enim $t : s :: e : u$) erit factâ reductione debitâ $t = \frac{2yykh + rskh}{2ffh + 2zzk}$.

Quod si aliæ quantitates terminorum irratio-

na-

nalium fractorumque locô assumantur; idem, sed aliâ ratione, obtinebitur quæsitæ subtangentis valor. Sic considerari possunt primo fractionum denominatores, assumique, $ff = yy + rx$, & $zz = cc + xx$. Deinde numeratoribus hac lege assumtis, ut per denominatores suos divisionem, ac per signa radicalia præfixa extractionem pati capaces sint, alia æquatio ex assumtis orta emerget.

Verb: Gr: si fiat $r^4 c^4 = ffr^3 l^3$, & $rrc^4 + yyx^4 = zzrrgg$; quinimo si visum fuerit, & quantitas rationalis $yy$ posset assumi $= rd$; erit æquatio ex assumtis orta $rl + rg = rc + rd$, seu, $l + g = c + d$. quem in finem, cum sola $c$, (item $x$ & $y$, si adessent) ad curvam expositam $ADE$ pertineat, ex cæterarum $l$, $g$, $d$, proprietate tot curvæ $ACG$, $ANK$, $AXZ$, ad eundem axem $AQ$ descriptæ supponantur, ita, ut $CQ$ sit $= l$, cujus infinitesima $GM = o$, subtangens $QR = k$; tum $QN$ & $QX$ existentibus $= d$ & $g$, quarum respectivæ infinitesimæ sint $IK$ & $OZ$, seu, $i$ & $\lambda$, ac subtangentes $LQ$ & $BQ$ relative $h$ & $n$; emerget, si æquatio ex assumtis orta ad respectivas reducatur infinitesimas $o + \lambda = u + i$.

Cum autem, juxta præcedentia, sit in curvis respectivis $o = \frac{le}{k}$, item $i = \frac{de}{h}$, nec non $u = \frac{ye}{t}$, ut & $u = \frac{se}{t}$, ac tandem $\lambda = \frac{ge}{n}$; his in locum infinitesimarum suffectis, & reductione institutâ fiet $t = \frac{skhn}{lhn - dkn + gkh}$. Quin

Quin & casus non infrequentes solent occurrere, ubi curvæ proprietas inter ipsas *x*, aut *y*, (licet surdis quibusdam quantitatibus fractionibusque implicitas) non consistit; sed per plurimas indeterminatas, æquationesque ex illis promanantes, cognita est; quæ tamen omnes, si modo vulgari tangens inquiratur, ad unicam æquationem reducendæ sunt; hac autem methodo tractatæ levi operâ absque reductione intentum produnt.

Sit in exemplum *Fig. XIII.* N°. 2. Conchöis *ADE*, polo *K* ac normâ *FG* descripta, cujus applicata *QD* sit: *y*; intercepta *AQ*: *x*; *AF* $=$ *DL*: *r*; *FK*: *s*; erit *QF* $= r - x$, quæ vocetur *h*; item *QK* $= s + r - x$, quæ dicatur *f*; *KD* fit *z*, ac subtangens *TQ*: *t*.

Emergent pro naturâ Conchöidis explicandâ sequentes æquationes I, $r - x = h$. II, $s + r - x = f$. III, $fr = hz$, est enim *QF*. $h$ : *DL*. $r$ :: *QK*. $f$ : *DK*. $z$. IV, $yy + ff = zz$, ob triangulum *KQD* rectangulum in Q.

Ex hisce jam æquationibus, absque reductione ulteriori, quæritur tangens expositæ Conchöidis.

Quare, exceptis quantitatibus determinatis *r* & *s*, supponantur reliquæ, quarum magnitudo pro variâ sui ad Conchöidem positione varia est, per respectivas infinitesimas crescere, Q*D* seu

ſeu $y$ quidem per infiniteſimam $a$; $AQ$ ſeu $x$ per $e$; $QF$ ſeu $h$ per $u$; $QK$ ſeu $f$ per $o$; & $DK$ ſeu $z$ per $i$.

Concipianturque ex ſupra inventis æquationibus tot curvæ, quarum applicatæ ſint $h$, $f$, $z$, deſcriptæ eſſe ad axem Conchöidis $AF$, quot æquationum inibi repertarum multitudo requirit, (quas tamen curvas ex inſtituto omiſimus, ut pateat hanc quidem methodum curvarum iſtarum deſcriptionem pro demonſtratione ſui agnoſcere, in ipſâ autem problematis ſolutione eas abſolute neceſſarias non eſſe) ac redigantur æquationes ad infiniteſimas:

erit ex I, $r - x - e = h + u$, unde $u = -e$.

ex II, $s + r - x - e = f + o$, unde $o = -e$.

ex III, $rf + ro = hz + hi + zu$, unde $ro = hi + zu$.

ex IV. $yy + 2ay + ff + 2fo = zz + 2zi$, unde $ya + fo = zi$.

jam, loco $u$ & $o$ ponendo $-e$, in III. & IV. fiet $\frac{ze - re}{h} = i = \frac{ya - fe}{z}$, quare $a = \frac{zze - rze + hfe}{hy} = \frac{ye}{t}$, eſt enim ex curvâ $TQ.\, t : QD.\, y :: DH.\, e : HE.\, a$, unde $t = \frac{hyy}{zz - rz + hf}$.

Notetur hinc conſequi compendioſam illam conſtructionem à *Carteſio lib. II. Geom:* inſinuatam, eſt enim Conchöidi in $D$ normalem recta in axe determinans $= \frac{yy}{t} = \frac{zz - rz}{t} + f$.

Observari meretur, anxiè inquiri opus non esse, num indeterminatæ per infinitesimas crescant, an vero decrescant, cum ipsa operatio ex curvæ naturâ cognitâ, in reliquis hoc suapte sponte patefaciat. Quantum etiam hæc tangentes ducendi ratio usum, & in calculo algebräico compendium præstet, imprimis circa maximi minimique determinationem, aliaque difficiliora matheseos problemata, rerum peritis satis perspectum est.

35. Quapropter, ut calculum hunc, licet præ aliis satis expeditum, adhuc quantum fieri potest contrahamus, sequentem subjicimus canonem in omnibus, quos hactenus recensuimus, casibus utilem. Ubi monuero me, ut alibi, ita & hic, *indeterminätarum* nomine tales quantitates denotare, quæ pro variâ positione magnitudinem variant, quales sunt curvarum omnium interceptæ & applicatæ, quin & ipsæ curvæ ad eas relativæ.

I. Singuli (iis, qui meris quantitatibus determinatis constant, rejectis) termini indeterminatas quantitates continentes, per exponentes potestatis singularum indeterminatarum multiplicentur, unamquamque scilicet indeterminatam seorsim considerando. Unde singuli termini æquationis curvæ secundum indeterminatarum, quas continent, numerum

in

in æquatione ad tangentem repetendi erunt, quo facto illi, qui unam indeterminatam continent, semel; qui duas, bis; qui tres, ter concurrent ad æquationem tangentis inquisitioni servientem efformandam, sic terminus $ffz^3y$ propter tres indeterminatas, $f, z, y$, tres æquationi ad tangentem terminos suppeditabit, $2ffz^3y$ ubi sola $f$, $3ffz^3y$ ubi sola $z$, & $ffz^3y$ ubi sola $y$ consideratur, & sic in cæteris.

II. Ubi indeterminata *applicatam* denotans consideratur, per omnes aliarum curvarum subtangentes, propriam subtangentem omittendo, multiplicetur terminus:

III. Ubi indeterminata *curvam* significans consideratur; unicâ per divisionem demptâ, eiq: tangenti hujus curvæ substitutâ, & hic per omnes aliarum curvarum subtangentes, propriam subtangentem omittendo, multiplicetur terminus.

IV. Ubi indeterminata *axem* seu *interceptam* referens consideratur, unicâ demptâ divisionis ope per omnes omnium curvarum subtangentes, nullam subtangentem omittendo; multiplicetur terminus.

V. Circa signorum notationem observetur, terminos omnes ortos his in casibus iisdem signis insigniendos esse, quibus termini, unde originem

nem duxerunt, affecti sunt; modo ab eâdem æquationis parte positi maneant, & potestates indeterminatarum, quæ considerantur, sint affirmativæ seu signo + notatæ; secus contrarium eveniet.

Quo peracto habebitur æquatio, pro cujuslibet curvæ æquationem datam, seu per se, seu per lineas sibi proprias ingredientis, tangenti investigandâ.

Demonstrationem, ut ex præcedentibus, ita ex sequenti exemplo quilibet hauriet.

*Scholium.* Licet enim hic indeterminatæ continuò per infinitesimas signo + affectas crescere supponantur, quod tamen in multis occasionibus alio modo contingit, nihil tamen officiet; cum æquationem hanc generalem ad unicam, cujus tangens quæritur, curvam restringendo, signa in ordinem suum sint reditura. Nec in algebrâ novum est, æquationem, cujus omnes termini signo + affecti sunt, nihilo æqualem statuere, juxtaque eam, uti normam, aliarum æquationum, quarum signa variant, proprietates investigare, cujus demonstrationem, cum ex sequentibus satis apparitura sit, hic pleniori discursu, brevitati studentes non firmabimus.

36. Sit *Fig. XI.* curvæ *ADE*, *ACG*, *ANK*, circa eundem axem *AQ* descriptæ, vocenturque curva *AD*: *c*. *DQ* applicata: *y*, item curva *AC*:*d*. *QC* applicata: *f*. tum & *QN*: *z*. & communis omnium curvarum intercepta *AQ*: *x*. ac detur æquatio.

$ddy^3x + ccf^3z = r^6 + ffz^3y.$

Quæ-

Quæritur, per canonem modo traditum, curvæ ex hisce tribus pro arbitrio selectæ tangens:

Sit eum in finem curvæ *ADE*, tangens *TD*: *s*, subtangens *TQ*: *t*. deinde curvæ *ACG*, tangens *RC*: *h*, subtangens *RQ*: *k*. tandem curvæ *ANK*, subtangens *LQ*: *n*.

Emerget singulis terminis juxta indeterminatarum, quas comprehendunt, numerum separatim tractatis

$ddy^3nkt + 3ddy^3xnk + 2dhy^3xnt$ loco $ddy^3x$,
$+ ccf^3zkt + 3ccf^3ztn + 2csf^3zkn$ loco $ccf^3z$,
$+ ffz^3ykn + 3ffz^3ykt + 2ffz^3ytn$ loco $ffz^3y$,
adeoque, rejectâ quantitate $r^6$ plane cognitâ, æquatio

$ddy^3nkt + 3ddy^3xnk + 2dhy^3xnt + ccf^3zkt + 3ccf^3ztn + 2csf^3zkn = ffz^3ykn$
$3ffz^3ykt + 2ffz^3ytn$

ad quamlibet ex subtangentibus *t*, aut *k*, aut *n*, determinabilis.

Quod si hæc ex methodo generali §. 32, & 33, expositâ inquiratur: indeterminatæ omnes per respectivas infinitesimas crescere supponantur, hoc est, in æquatione ad infinitesimas redigendâ, quod hic requiritur, loco, $x$, $y$, $c$, $f$, $d$, $z$, respective sufficiantur $x + e$, $y + a$, $c + u$, $f + o$, $d + i$, $z + x$. & fiet sublatis juxta §. 6 & 7. tollendis $y^3dde + 3yyddxa + 2dy^3xi + 2cf^3zu +$

$3ccffzo + cccf^3\lambda = 2fz^3yo + 3ffzzy\lambda + ffz^3a.$

Unde articulus hujus regulæ primus demonstrationem suam petit.

Porro cum ex curvarum naturâ sic $a = \frac{ye}{t}$, $u = \frac{se}{t}$, $o = \frac{fe}{k}$, $i = \frac{he}{k}$, & $\lambda = \frac{ze}{n}$, hisce in infinitesimarum locum surrogatis orietur æquatio, ubi singuli termini (solis illis, in quibus *e* reperitur exceptis) per ejus curvæ subtangentem divisi erunt, ad quam aut cujus applicatam infinitesima referri debet: istique, quos infinitesimæ *i* & *u* ingrediuntur, per curvarum hisce infinitesimis crescentium tangentes, unicâ curvarum potestate diminuti, multiplicati apparebunt.

Unde, æquationem reducendo, ipsâ operatione patebit sequentium hujus canonis articulorum demonstratio.

Quam obiter tyronibus indigitasse, ne tædium pariam, hic suffecerit; exercitatis alioquin satis obviam.

37. Sit *Fig. XI.* perstantibus iisdem, $fz = yy$, hoc est, curva *A D E* ejus naturæ, ut, ductis duabus curvis *A C G* & *A N K* ad eundem axem, sit perpetuo rectangulum *N Q C* æquale quadrato in *D Q*. oportet uni ex his tangentem designare. Quare, adhibitâ §. 35. traditâ methodo, erit, retentis iisdem subtangentium symbolis, æqua-

æquatio generalis ad tangentem, $fznt + fztk = 2yykn$, & facto $yy = fz$, ac divisione institutâ, $nt + tk = 2kn$.

Unde, ex datis duarum quarumlibet curvarum subtangentibus, subtangens tertiæ manifestatur.

*Coroll. I.* Notetur hanc, ut & consimiles æquationes ad infinitas curvas determinari posse, earumque omnium tangentes hac ratione una opera definiri. Verb: Grat: sit, $f$ ad triangulum seu, $f = x$ erit $k = f = x$, & sit $z$ ad trianguli complementum seu $z = 2r - x$, erit $n = -z = x - 2r$, adeoque $y$ ad circulum, seu $yy = 2rx - xx$; cujus ergo subtangens $t = \frac{2kn}{n+k} = \frac{2xx - 4rx}{2x - 2r}$ seu $\frac{2rx - xx}{r - x}$ ut supra.

*Coroll. II.* Sit $yy$ ad hyperbolam, seu $yy = rx + \frac{r}{q}xx$. potest sumi $f$ ad triangulum; & ita fieri $f = x$; unde, uti mox, $k = f = x$. & remanebit $z = r + \frac{r}{q}x$ ad aliud triangulum, unde $n = \frac{qz}{r} = q + x$; adeoque hyperbolæ subtangens $t = \frac{2qx + 2xx}{q + 2x}$.

*Coroll. III.* Quin & hoc generaliter obtinet; datis tribus curvis, quarum applicatæ sint in continua proportione, ut sit $f : y :: y : z$. erit ut summa subtangentium extremarum, $n + k$, ad alterutrius subtangentem $k$, ita subtangens reliquæ, $n$, ad semissem subtangentis mediæ $\frac{1}{2}t$.

Co-

*Coroll. IV.* Sit $z$ ad circulum, & $zz = 2rx - xx$, item $f$ ad hyperbolam æquilateram & $ff = 2rx + xx$, erit $y^4 = 4rrxx - x^4$; cujus ergo tangens ex circuli & hyperbolæ tangentibus cognita est; neque novit hujus methodi extensio limitem.

*Coroll. V.* Hoc tamen inter cætera notetur; cum omnes tangentium methodi in determinatâ alicujus curvæ natura substiterint, ejusque parametros determinatas deposcant, hanc solam parametrorum limitationem non respicere. Verb. Grat. sit $z = x$, erit $fx = yy$; quæ æquatio, si $f$ foret determinata $= r$, esset ad parabolam; ipsâ autem $f$ manente indeterminatâ, erit ad curvam ex infinitis parabolis formatam, quarumque parametri sunt curvæ pro arbitrio sumendæ se mutuo sequentes applicatæ; cujusque æquatio ad tangentem, cum hoc in casu sit $n = x$, per modo inventa, erit $tx + tk = 2kx$, quæ æquatio, si ad parabolam ordinariam limitari debeat, fiet $z = r$, unde $k$ est infinita; quare, per Schol: Gener: Lemm. N.XII. rejectâ $tx$, erit $tk = 2kx$, & $t = 2x$, uti oportet.

§. 38. Antequam ad alia transeam, hoc addo. Sit iisdem manentibus $z, fx + zxx = fyy$, quæ æquatio, præter infinitas alîus generis curvas, etiam est ad infinitas hyperbolas, seu curvam

vam ex iis formatam. Quæritur ipsius tangens.

Hæc autem juxta præcedentem regulam quæsita dabit æquationem

$$zftnk + zfxnt + zfxkt + 2zxtnk + zxxkt = 2fyykn + fyynt.$$

quæ, pro variâ ipsarum $f$ & $z$ ad varias curvas determinatione, variarum, imo infinitarum curvarum tangentibus inveniendis sola inservire potest. Quod præcedentis paragraphi corollaria satis faciunt manifestum.

39. Quo vero modo generalis hæc æquatio rursum ad hyperbolam vulgarem limitetur, ostendisse operæ fuerit pretium; cum hic non sine cautelâ à generali ad particulare regressus detur.

Fiat ergo $f = q$, & $z = r$; aut si mavis, utraque, cum ad omnes lineas possit, ad parallelogrammi rectanguli applicatam determinetur; erunt eo ipso $k$ & $n$ infinitæ, (cum rectanguli subtangens sit infinita, quod facili negotio demonstrabile & omnibus notum est) dividatur jam tota æquatio per infinitam $k$, erit $zftn$

$$+ \frac{zfxtn}{k} + zfxt + 2zxtn + zxxt = 2fyyn + \frac{fyynt}{k}.$$

Jam vero, ex Schol: Gener: Lemm. N. XIV, termini $\frac{zfxtn}{k}$ & $\frac{fyynt}{k}$ per infinitam $n$ multipli-

cati, ac rursum per infinitam $k$ divisi fiunt hoc ipso determinabiles; unde, per ejusdem Schol. N. XII, cum omnibus cæteris terminis determinabilibus $zfxt$, $zxxt$, rejecti æquationem hanc reliquam faciunt: $zftn + 2zxtn = 2fyyn$, aut repositis pro $f$ & $z$ valoribus $q$ & $r$, ac reductâ æquatione, $qrt + 2rxt = 2qyy$. quæ æquatio est ad tangentem hyperbolæ Apollonianæ, cujus æquatio: $qrx + rxx = qyy$.

Posset & hæc regressio alio modo fieri, dividendo omnes terminos per utramque infinitam $kn$. unde ex ejusdem Scholii General: præceptis idem proveniret.

*Coroll.* Hinc *maximi* ac *minimi* jam plurimis usitata methodus demonstrationem suam haurit; tum & altiorum quoque graduum curvarum in plano descriptiones facillimo forsan modo deducuntur; quæ, cum hujus non sint loci, uti & plurima alia hinc originem ducentia, latius hoc tractatu non prosequemur.

40. Hoc addam, methodum huic consequi, quâ si determinatæ cujusdam curvæ, Verb: Gr: Cissöidis tangens expetatur, possit hac ratione æquatio exhiberi, non modo Cissöidis ex circulo aliisve curvis infinitis oriundæ, verum & aliarum insimul curvarum, ac satis primâ fronte à Cissöide dissentiri apparentium tangentes

unâ

unâ operâ determinans. Sit ergo, *Fig. XI*, curva *ANK* Cissöis ex circulo *ADE* ortum ducens; ac vocatis radio $r$, $AQ:x$. $DQ:y$, $QN:f$. ipsius æquatio $x^3 = 2rff - xff$. fiatque $2r - x = z$, cui æqualis statuatur curvæ *ACG* applicata $CQ$, erit $x^3 = zff$. ac posita $x$ ad aliam curvam, cujus applicata $QX = d$, erit $dxx = zff$, aut $ddx = zff$, aut $d^3 = zff$ pro libitu; unde tangentem inveniendo per superiora, & Cissöidis & infinitarum præterea curvarum tangentes habebuntur.

Potuisset & ipsa Cissöidis æquatio per aliam indeterminatam dividi, aut multiplicari, Verb: Gr: per $x$; ac foret, $x^4 = 2rxff - xxff$; ubi, factis $2rx - xx = yy$, fieret $xx = fy$. ac, ipsam $x$ ad applicatam $d$ referendo, $dx = fy$, aut $dd = fy$ unde idem consequeretur.

Hæc autem mille modis variari posse jam sufficienter probatum autumo.

*Scholium.* Cunctis fere Mathematicis hactenus in more fuit positum curvarum proprietates æquationibus comprehendere; in iisque quantitates, quæ *parametrorum* nomine venire vulgo solent, in omnibus curvæ punctis ejusdem ac invariatæ magnitudinis considerare; uti & pro immutabilibus habere quarumlibet quantitatum æquationem ingredientium, potestatum exponentes; cæteris, quæ indeterminatæ audiunt, & quantitatem mutant, residuam solummodo terminorum æquationisque partem constituentibus; has autem curvas hujus capitis initio discussimus.

Alia vero curvarum genera præcedentibus proximè paragraphis expendimus, ubi nimirum & ipsæ parametri indeterminatæ, ac in singulis curvarum punctis ex loci, ad quem pertinere supponuntur, lege variæ fuerunt; manentibus interim potestatum indicibus determinatis ac constantibus. Quare & curvarum ordo ad eas impræsentiarum nos deduxisse videtur, in quibus potestatum indices in singulis curvæ punctis immutantur.

Quarum consideratio, si plane nova non sit, trita saltem & multis obvia censeri non debet. Ac cum hac in parte Geometria ac imprimis problematum, alias satis difficilium, constructio maximopere possit promoveri; eæque curvæ in Mathesi potissimum ad res Physicas applicata frequentissimè occurrere, quinimo enasci sua sponte videantur; nec earum in plano delineationes usque adeo sint cognitæ; operæ forsitan fuerit pretium hisce curvarum quandam speciem præmittere, quas & ipsa natura quandoque formare deprehenditur, quarumque proprietas expressa æquatione, ad instar aliarum, primâ instantiâ efferri minime solet; quæ tamen curvarum modo recensitarum originem, ac descriptiones in plano, plurimum illustrant.

41. Sit, *Fig. XVIII.* No. 3, recta *AF* determinata = *f*, cui in dato quolibet angulo *AFG* applicetur recta *FG* itidem determinata = *g*; eâ conditione, ut (assumtis ipsius *AF* parte aut partibus quibusvis aliquotis *AH*, *AB*, &c. quinimo, si visum fuerit, in ipsâ *AF* productâ, ipsius *AF* in datâ quavis ratione multiplicibus *AD*, *AK*, &c.) si ad singulas assumtarum extremitates *H* aut *B*, aut *D*, aut *K* & similes, singulæ rectæ *HN*, *BC*, *DE*, *KM*, &c. respective applicentur, ipsi *FG* æquidistantes,

hæ

hæ legem quandam obſervent ac relationem conſtantem & immutabilem, tum reſpectu ipſius $FG$, tum reſpectu aſſumtæ, quam abſcindunt.

Hoc autem toties fieri ſupponatur, donec ipſæ applicatæ proxime $HB$, $BC$, &c. non niſi infiniteſimâ parte $HB$ a ſe mutuo diſtent; unde ipſa $ANCGEMQ$, ſeu rectularum, quæ applicatarum extrema connectunt, ſumma in curvam regularem abibit.

Quæritur jam, ex cognitâ applicatarum ſpeciali relatione, ipſius curvæ æquatio Geometrica, ſeu talis, quæ inter hujus curvæ applicatam interceptamque conſtituta eſt, ipſiuſque curvæ tangens.

Sit, ergo curva $AGQ$ ratione modo expoſitâ generata; ac ſumtis $AH = \frac{1}{3}f$, $AB = \frac{4}{5}f$, $AD = \frac{8}{7}f$, $AK = 2f$, *& ſic pro arbitrio pergendo.* ſpecialis applicatarum inter ſe relatio ſit ea, quæ ſequitur, nimirum, $HN = \frac{1}{9}g$, $BC = \frac{16}{25}g$, $DE = \frac{64}{49}g$, $KM = 4g$, ac ſic in cæteris. Unde partium ipſius $AF$ aliquotarum, ipſiuſque multiplicium exponentes numeros vocando generali applicatione $z$, hæc emerget curvæ ex præmiſſâ hypotheſi proprietas; ſcilicet, ſi

Si $AB$ aut $AD$ assumta fuerit $= zf$, erit ipsam respiciens applicata $BC$ aut $DE = zzg$. ex quibus hoc pacto curvæ æquatio Geometrica innotescit: sit: $AD = zf = x$, erit, $z = \frac{x}{f}$; tum & $AD = zzg = y$, erit $zz = \frac{y}{g} = \frac{xx}{ff}$, & $\frac{ff}{g}y = xx$. unde patet curvam $AGQ$ esse parabolam, cujus latus rectum $= \frac{ff}{g}$.

Subtangens autem hujus seu $t$ est ex § 35. $= \frac{ffy}{2gx}$, & loco $x$ & $y$ valores reponendo $= \frac{zf}{2}$.

Ne autem, ut in § proximè prægresso, applicatarum abscissarumque relationes numeris continuo exprimere necesse habeamus, in sequentibus numerorum loco solam $z$ adhibebimus, ipsâque quoslibet tum partium aliquotarum, tum multiplicium ipsius $AF$ exponentes numeros significabimus, tum & curvæ, quæ præ manibus est, subtangentem $t$, uti sæpius, dicemus.

42. Sit; stante §. 41. Hypothesi, $AD = zf = x$, ac $DE = \frac{g}{z} = y$, erit $z = \frac{x}{f} = \frac{g}{y}$, & $xy = fg$; unde curva $AEQ$ est hyperbola, ac subtangens $t = -x$.

43. Manentibus iisdem, ac $AD = zf = x$, sit $DE = y = \sqrt{zfg - zzgg}$, seu, $zfg - zzgg = yy$; unde in ultimâ hac æquatione posito $\frac{x}{f}$ loco $z$, erit $xg - \frac{xx}{ff}gg = yy$, æquatio ad Ellipsin; & facto $g = f$, ad circulum $fx - xx = yy$;

sub-

subtangens ex præcedentibus nota est.

43. Sit, positis $p$ & $q$ potestatum determinatis indicibus, ac cæteris ut supra, $z^p f = x = AD$, ac $z^q g = DE = y$, est $z^p = \frac{x}{f}$, & $z^q = \frac{y}{g}$, unde post reductam æquationem $g^p x^q = f^q y^p$, locus ad paraboliformem quamlibet. Quod si $q$ signo negativo afficiatur, fiatque $\frac{g}{z^q} = y$, erit æquatio $y^p x^q = g^p f^q$ ad hyperboliformem.

45. Sit $zf + zzf + z^3 f = x = AD$, ac $zg + zzg + z^3 g = y = DE$, erit $z + zz + z^3 = \frac{x}{f} = \frac{y}{g}$, & $gx = fy$ ad lineam rectam.

46. Sit $zzf + z^3 f = x = AD$, & $z^q g = DE = y$, emerget, ipsâ $z$ per æquationum comparationem elisâ, æquatio ad $x$ & $y$; cujus ut & præcedentium omnium subtangentes ex §. 35. cognitæ sunt. Possent & hic præcedentium conversæ demonstrari. Sed, cum operæ vix futurum sit pretium, his supersedebimus.

47. Sit post hæc præmissa, jam in *Fig. XVIII.* No. 1, $AF = f$, & $FG = g$, item $AN = r$, voceturq; $AQ = fz$, & $QD = \frac{g^z}{r^{z-1}}$, unde si intercepta fiat $x = 1f, 2f, 3f$, &c. aut $\frac{1}{2}f, \frac{1}{3}f, \frac{1}{4}f$, &c. erit applicata respectiva $y = g, \frac{g^2}{r}, \frac{g^3}{r}$ &c. aut $\sqrt{rg}, \sqrt{C\,rrg}, \sqrt{\sqrt{r^3 g}}$.

quod

quod potestatum designationem ex Lemm. 50. &c. intelligenti, satis patet.

Quæritur jam ex datâ hac proprietate hujus curvæ *NDO* æquatio, quapropter fiat ut supra $zf = x$, erit $\frac{x}{f} = z$; tum facto $\frac{g^z}{r^{z-1}} = y$, ac ipso $\frac{x}{f}$ in locum ipsius potestatis $z$ reposito fiet $g^{\frac{x}{f}} = r^{\frac{x}{f}-1} y$, quæ debitè reducta dabit $g^x = r^{x-f} y^f$.

Jam autem, ut ex hac æquatione subtangens inveniatur, sit $TQ : t$, $QD : y$, $QP = DH : e$, $HE : a$, tum $AQ : x$, ponaturque loco $x$ ipsa $x+e$, ac loco $y$ ipsa $y+a$, in æquatione inventâ.

Erit $g^{x+e} = r^{x-f+e} y^f + f r^{x-f+e} y^{f-1} a$; quæ divisa per æquationem datam $g^x = r^{x-f} y^f$, exhibebit $g^e = r^e + f r^e y^{-1} a$; & facto $e = \frac{b}{m}$ (posito $m$ loco numeri infiniti) cum sit $t : y :: e : a$. erit $a = \frac{by}{tm}$, quæ in locum ipsorum $e$ & $a$ substituta dabit, $g^{\frac{b}{m}} = r^{\frac{b}{m}} + \frac{f r^{\frac{b}{m}} b}{tm}$, unde æquatio ad

ad tangentem determinata $tmg^{\frac{b}{m}} - tmr^{\frac{b}{m}} = fbr^{\frac{b}{m}}$.

& facto $b = t$, aut $e = \frac{t}{m}$ erit $mg^{\frac{t}{m}} - mr^{\frac{t}{m}} = fr^{\frac{t}{m}}$, quæ ſubtangentem $TQ$ ipſius curvæ determinat.

*Coroll. I.* Obſervetur hujus curvæ ſubtangentem $t$ eſſe in omnibus curvæ punctis ejuſdem magnitudinis, æquatio enim ipſius valorem manifeſtans, ſolâ $t$, quæ quæritur, exceptâ ex quantitatibus, $g$, $r$, $f$, immutabilibus, ac ſibi per totam curvæ longitudinem conſtantibus componitur.

*Coroll. II.* Tum & hoc notari meretur, inventam modo æquationem $g^{x} = r^{x-f} y^{f}$ eſſe curvæ Logarithmicæ propriam; ac hujus ope ex facili inveniri, ex dato quidem numero logarithmum, & è converſo.

Si enim fiat $AN$ ſeu $r =$ *unitati*, $AF$ ſeu $f = 100000$, item $FG$ ſeu $g = 10$, emerget $10^{x} = 1^{x-100000} y^{100000}$.

Et, cum unitatis ad quamlibet evectæ poteſtatem non mutetur valor, ſed maneat eadem ac ſibi perpetuo conſtans unitas, adeoque ſit $1^{x-100000} =$ *unitati*, inventa modo æquatio

eadem

eadem erit cum hac $10^x = 1y^{100000}$, ad specialem illam pertinens Logarithmicam, quæ jam ob egregium, quem in Geometria practica præstat, usum inclaruit; quomodo vero ex dato numero $y$ inveniatur ipsius logarithmus $x$, & contrarium, hinc satis apparet, ac uberior ejus dilucidatio hujus non est loci, cum hanc æquationem ex more in algebra usitato tractanti ultro sese offerant.

48. Sit, retentis superioribus, in eâdem *Fig. XVIII.* No. 1, æquatio curvæ $y^x = r^{x-fgf}$ oportet ei tangentem designare, unde ipsi $x$ suffecto $x+e$, tum ipsi $y$ substituto $y+a$, uti paragr. præced. emerget æquatio ad infinitesimas redacta $\overline{y+a}^{x+e} = r^{x+e-fgf}$, seu multiplicatione instituta, $y^{x+e} + xy^{x+e-1}a + ey^{x+e-1}a = r^{x+e-fgf}$, deletisque ex §. 7, delendis $y^{x+e} + xy^{x+e-1}a = r^{x+e-fgf}$; quæ divisa per æquationem curvæ exhibet, $y^e + xy^{e-1}a = r^e$, & loco $a$ reposito $\frac{ye}{t}$ ac æquatione in $t$. ductâ, $ty^e + xy^e e = tr^e$. quæsita æquatio ad tangentem;

Possit autem, ex Scholio 1. §. 3, positâ $m$ infinita, loco $e$ ipsa $\frac{h}{m}$ surrogari, & habebitur alia æquationis forma.

49. Cum

49. Quoniam vero hæ curvæ vulgaris non sunt ordinis, ac circa Logarithmicam, §. 47, ex ejus descriptione æquationem deduxerimus, hic è converso ex æquatione datâ descriptionem eruemus. Sit ergo æquatio modo proposita $y^{x} = r^{x-f} g^{f}$, unde extractâ radice potestatis $f$, emerget, $y^{\frac{x}{f}} = r^{\frac{x}{f}-1} g$; & ponendo $\frac{x}{f} = z$ seu numero, (cum potestas lineæ per eandem alterius lineæ potestatem divisa numerum generet, est enim $f : x :: unitas : \frac{x}{f}$ quare, $\frac{x}{f}$ est numerus) erit æquatio $y^{z} = r^{z-1} g$, seu, $y = r^{\frac{z-1}{z}} g^{\frac{1}{z}}$, & $x = fz$.

Hinc si $AQ$ seu $x = fz$ sint $= 1f, 2f, 3f$, &c. erunt $QD$ respective seu $y = g, \sqrt{rg}, \sqrt{C\,rrg}$ &c. unde curvam hanc describendi modus innotescit.

50. Sit jam exposita curvæ relatio $g^{x} = r^{x-y} f^{y}$ ac quæritur recta eam contingens, quare, æquatione ad infinitesimas redactâ, est $g^{x+e} = r^{x+e-y-a} f^{y+a}$, quæ divisa per æquationem curvæ exhibet $g^{e} = r^{e-a} f^{a}$; & cum sit $a = \frac{ye}{t}$, hoc reposito in æquatione erit $g^{te} = r^{te-ye} f^{ye}$, & extractâ radice potestatis $e$, fiet $g^{t} = r^{t-y} f^{y}$.

 Cum

Cum autem hujus curvæ descriptio in mox prægressarum morem difficulter succedat, aliam ineundo viam eam describemus, ac ope logarithmicæ vulgaris.

Sit ergo, sumendo $p$ determinatam, $n$ vero indeterminatam, $g^x = r^{x-p} n^p$; quæ æquatio est ad logarithmicam $PDK$ ordinariam, uti ex §. 47. constat, hæc, *Fig. XVIII.* N. 2. parametris $AP$, $= r$, $AC = p$ & $CK = g$, juxta eundem §. 47, describatur, eritque abscissa $AB = x$, & $BD$ quælibet $= n$.

Jam, cum ex mox assumtâ hypothesi consequatur etiam esse $r^{x-y} f^y = r^{x-p} n^p$, erit utrobique dividendo per $r^{x-y}$, juxta Lemm. 50. &c. $f^y = r^{y-p} n^p$, quæ æquatio itidem est, sed ad aliam logarithmicam $IFL$; hæc rursum, juxta §. 47, parametris $HI = r$, $CH = p$, $CL = f$ descripta censeatur ad eundem cum primâ axem $OL$, & factâ perpetuo $GF = BD = n$, erit semper $GH = y$.

Quæ $GH$ seu $y$ si applicetur denuo respective ad $AB$ seu $x$, hoc est si sit perpetuo $BM = GH$, donec curva $NMO$ designata sit; erit hæc eadem cum illâ, cujus tangentem modo investigavimus. Quod ut a posteriori probemus

est

est $g^x = r^{x-p} n^p$ seu, $g^x r^{p-x} = n^p$. tum $f^y = r^{y-p} n^p$; hoc est divisione per $r^{y-p}$ factâ, $f^y r^{p-y} = n^p = g^x r^{p-x}$; quæ æquatio divisa per $r^{p-x}$ dabit quæsitam $r^{x-y} f^y = g^x$.

*Schol.* Possent & his plura hujus generis exempla adjici, curvarumque, in quarum æquationibus ipsæ indeterminatæ inter potestatum indices reperiuntur, contemplatio ulterius extendi; ipsæque curvæ in loca & classes suas distribui; adeoque & illæ examinari, in quibus potestatum indices & suis rursum affecti sint potestatibus, hique rursum aliis, &c. tum & eæ hujus generis curvæ, quarum æquationes multiplici terminorum numero constant.

Illas enim, quarum inter duos tantum terminos consistit æquatio, terminis absolute cognitis hisce non annumeratis, propositionibus modo prægressis consideravimus, adeoque & primam earum classem discussimus.

Reliquarum autem curvarum examinationem, integrum forsan tractatum deposcentem, hic prætermittemus; cum sola earum tangentes ducendi methodus huc tantum directè spectet, quæ, modo traditis rite perpensis, satis, ni fallimur, elucidata comperietur.

Approximationes enim, quarum auxilio subtangentium quantitas præterpropter in terminis usitatis exhiberi potest, hic non tractamus.

51. Sit *Fig. XIV.* duæ curvæ *ABCD* & *EFGH* (ut ad alias transeamus) ita relatæ, ut, si a puncto *O* projiciatur recta *OBF*, curvas secans in *B* & *F*, lineæ *OB* & *OF* relationem

quandam assignatam ad se mutuo habeant; &, ex $O$ elevatâ rectâ $OK$ ipsi $OF$ normali, ducatur $BS$ tangens curvam $ABC$ in B; quæritur in $OK$ punctum $K$, ubi $F$K tangens curvam $EFG$ in F rectam K$O$ secat. Sumtâ in curvâ $ABC$ infinitesimâ B$C$, ductâque $OCG$ erit, juxta Lemm. 40, F $G$ suæ curvæ infinitesima: hinc ductis centro $O$ arcubus B$L$ & F$I$, erunt juxta Lemm. 38 & 39, $CL$, BL, & $GI$, F$I$, infinitesimæ; & triangula, $SO$B & BL$C$, item K$O$F & F$IG$ similia. Fiant ergo: $O$B: $y$, $O$F. $z$, $OS$: $t$, $O$K: $k$, infinitesimæ BL: $e$, $CL$: $a$, F$I$: $i$, $IG$: $o$. Unde $OC$: $y+a$ & $OG$: $z+o$. quare positis quatuor infinitesimis totidem opus erit æquationibus, quarum prima (per: 39 Lem.) $t:y::e:a$, unde $e=\frac{ta}{y}$; secunda $k:z::i:o$. Unde $i=\frac{ko}{z}$; tertia ex sectorum seu triangulorum O B L & O FI analogiâ ortum ducit, nam: $y:e::z:i$. unde $e=\frac{yi}{z}=\frac{ta}{y}$, quare $\frac{tza}{yy}=i=\frac{ko}{z}$, ac tandem $\frac{atzz}{kyy}=o$; quæ tres æquationes in cunctis hujus naturæ problematis obtinent, quartam suggerit ipsa curvarum assignata relatio.

52. Sit ea Verb: Gr: ut O B sit ad O F perpetuo ut $r$ ad $s$; erit adeo $r:s::y:z$, seu $sy=rz$, & ad infinitesimas: $sa=ro$; unde $o=\frac{sa}{r}=\frac{atzz}{kyy}$ ex præcedenti; unde $k=\frac{tz}{y}$; quia $rz=sy$. quod monstrat hoc casu F K & B $S$ fore parallelas.



53. Sit

53. Sit jam rectangulum O B in O F semper æquale quadrato definito $rr$; erit, $zy = rr$; & $zy + za + yo + ao = rr$, seu juxta: §. 5 & 6, $o = -\frac{az}{y} = \frac{atzz}{kyy}$ ex §. 51, unde $k = \frac{-tz}{y}$; quod signum ostendit K à contrariâ ipsius *S* parte statuendum, uti abundè notum.

54. Quòd si detur B F semper determinatæ rectæ $r$ æqualis, erit $z - y = r$, adeoque $o = a = \frac{atzz}{kyy}$; unde $k = \frac{tzz}{yy}$; & hinc omnigenarum Conchöidum, prout *A* B *D* vel recta, vel curva quælibet assumta fuerit, tangentes profluunt.

55. Fiat $zz - yy = rr$, erit $zo = ay$, & $o = \frac{ay}{z} = \frac{atzz}{kyy}$, & $k = \frac{tz^3}{y^3}$. & sic in cæteris potestatibus; si fuerit $z^p - y^p = r^p$ erit $ky^{p+1} = tz^{p+1}$. Quomodo autem, ubi plura data sint puncta, tangentes ducendæ veniant, hinc levi operâ deducitur.

56. Ad tangentes curvarum provehimur, cum curvæ ad alias curvas variis modis referuntur.

Sint *Fig. XV.* tres curvæ L*CD*K, *GEFH*, *MN*OP ita relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ *CEN* ad positione datam parallelâ, curvasq; ut vides, secanti, sit semper *C E* ad *C N*, ut $p$ ad $q$; dataque B*C* aut *AC* subtangente alterutrius, quæritur alterius tangens. Assumtâ *CD*, curvæ L*CD* portione infinitesimâ: $u$, ductâque *DO* ipsi *CN* parallelâ, jungantur, *NR*, *EI*, ipsi *CD* seu $u$ æquales & æquidistantes, fiantque *CN*: $z$, *CE*: $y$, F*I*: $a$, *R*O: $o$, B*C*: $t$, *AC*: $k$, erit F*D*: $y + a$, O*D*: $z + o$.

Jam

Jam $BC:EC::EI:FI$. hoc est $t:y::u:a$. unde $u = \frac{at}{y}$;

Item $AC:CN::NR:RO$. seu $k:z::u:o$. quare $u = \frac{ko}{z} = \frac{at}{y}$, ergo $\frac{kyo}{tz} = a$. Sed ex relatione, $p:q::y:z$, fit $qy = pz$, & (juxta methodum insinuatam §. 6 & 7,) $qa = po$, unde $a = \frac{po}{q} = \frac{kyo}{tz}$, & $tpz = kqy$; unde $t = k$, quia $pz = qy$. quare puncta $B$ & $A$ hoc in casu coincidunt.

57. Sint curvæ $LCDK$ & $GEFH$ ita relatæ, ut recta $EC$ ad curvam $LC$ perpetuo datam obtineat rationem, ut $p$ ad $q$. quæritur $BC$ seu tangentis curvæ $GEFH$ determinatrix. Factis omnibus, ut in præcedenti, sit $LC$ curva : $c$, erit $LD$ : $c+u$, & $t:y::u:a$, ergo $u = \frac{at}{y}$; sed ex relatione $p:q::y:c$. unde $qy = pc$, & $qa = pu$, quare $u = \frac{qa}{p} = \frac{ta}{y}$, & hinc $qy = pt = pc$; ergo $t = c$. seu $BC$ æqualis curvæ $LC$.

58. Si vero, ut unico calculo plures casus comprehendantur, relatio data sit $p^k : q^s :: y^k : c^s$, erit $p^k c^s = q^s y^k$, & pro $y$, ac $c$, positis $y+a$, ac $c+u$, emerget juxta §. 5 & 6. $sp^k c^{s-1} u =$

$= k q^s y^{k-1} a$, & applicatâ æquatione ad $y c$, fit $s p^k c^s y u = k q^s y^k c a$; quæ si hinc inde dividatur per $p^k c^s = q^s y^k$, fiet $\frac{kca}{sy} = u = \frac{at}{y}$ & $\frac{kc}{s} = t$.

Quod si curva *L C D K* ad circulum determinetur, erit *G E F H* ex innumeris Cycloidibus una; cujus adeoque tangens, & omnium curvarum similem ortum habentium hic ostenditur.

59. Quin & methodi hujus elucidandæ gratia, Cycloidis *A L M O* tangentem *Fig. XVI.* ex aliâ ad semicirculum hypothesi investigabimus, quod primo in quibuscunque hujuscemodi curvis universaliter aggrediemur, sint *A B G* & *A L O* curvæ ad eundem axem ita relatæ, ut ductâ *L B E* axi normali, habeat *L B* curvis interceptæ ad curvam *A B* rationem semper eandem, ut *p* ad *q*.

Sit *L E*: $z$, *B E*: $y$. unde *B L*: $z - y$, *KE*: $t$, *I E*: $h$, *K B* & *I L* respectivas curvas tangant, sitque *B F* tangenti *K B* normalis, *E F*: $l$. tum *B F*: $r$. & curva *A B*: $c$.

Infinitesimæ *E D*: B *P*: *L N*: $e$, *C P*: $a$, B *C*: $u$, *M N*: $i$,

Erit primo $t : y :: e : a$, unde $a = \frac{ye}{t}$, tum

$h : z :: e : i$, quare $i = \frac{ze}{h}$; tertio $r : y :: u : e$, & hinc $u = \frac{re}{y}$; jam vero ex curvarum relatione $p : q :: z - y : c$, seu $qz - qy = pc$; & quoque juxta sæpius insinuata $qi - qa = pu$; quapropter si loco, $i, a, u$, sufficiantur modo inventi valores, ordinatâ æquatione fiet $qtzy - qhyy = prht$; factoque $yy = tl$, (quia $t : y :: y : l$) erit $h = \frac{qyz}{pr + ql}$.

60. Quod si curva A L O sit Cyclöis primaria, & *A* B *C* huic respondens semicirculus, erit $p = q$, & $hr + hl = yz$.

61. Quomodo autem generaliori modo possint inquiri similium curvarum tangentes; posita relatione $p^k : q^s :: \overline{z - y}^k : c^s$ ex præcedentibus quivis colliget.

62. Sit *Fig. XVII.* curva *ACD*, rectæque *AQ*, *DQ* positione datæ; item alia curva *A* F *D* ad priorem ita relata, ut ductis duabus rectis *E M* ad *DQ*, & *E* B ad *QA* parallelis, semper habeat intercepta *AM* ad curvam *A*B rationem datam, ut *p* ad *q*; lineæ FEK & *CBH* tangant curvas, dicaturque BH: $h$, K*M*: $t$, *AM*: $x$, *ME*: $y$, curva *A*B: $o$, infinitesimæ BR: NL: $i$, CR: FG: $a$, MP: EG: $e$, BC: $u$; erit FP: $y + a$, AP: $x + e$, curva AC: $o + u$; jam datâ tangente H B: $h$, quæritur K M: $t$, quæ tangentem curvæ A F D determinat; est igitur $t : y :: e : a$ unde $a = \frac{ye}{t}$; secundo $h : y :: u : a$, seu $\frac{yu}{h} = a$

ye

$= \frac{ye}{t}$, & hinc $u = \frac{be}{t}$; sed relatio curvæ $p:q::x:c$, seu, $qx = pc$, quare etiam $\frac{qe}{p} = u = \frac{be}{t}$, unde $t = \frac{pb}{q}$.

63. Quod si curva *ABCD* sit quadrans circuli, cujus radius $r$, peripheria $d$; statuaturque ratio $p$ ad $q$ eadem, quæ $r$ ad $d$; erit $t = \frac{rb}{d}$.

64. Nec opus hic adjicere comprehensivam magis relationis hypothesin; quæ si sit $p^k:q^s::x^k:c^s$ erit $t = \frac{sxb}{kc}$; unde sublatâ $c$ per æquationem datam ipsa $t$ per lineas rectas exprimetur.

65. Sint *Fig. XIV.* duæ curvæ *ABCD* & *EFGH*, ita relatæ, ut a puncto quopiam projectâ quavis rectâ *OBF*, semper O B ad curvam E F rationem habeat constantem, ut $p$ ad $q$; tangant SB & K*F* curvas respectivas, sitq: KO normalis OB, ducatur OG, ut vides, ac vocetur OB:$z$, K*F*:$f$, O*F*:$y$, KO:$h$, SO:$t$, curva E*F*:$c$; infinitesimæ vero *FG*:$u$, *FI*:$o$, *BL*:$e$, *CL*:$a$, quæritur SO seu $t$; primo (per Lemm. 38 & 39,) $t:z::e:a$, & $e = \frac{ta}{z}$; secundo, ob parallelas *FI* & BL $z:e::y:o$, unde $e = \frac{zo}{y} = \frac{ta}{z}$, hinc $o = \frac{tya}{zz} = \frac{hu}{f}$; quia $f:h::u:o$; adeoque $\frac{tfya}{hzz} = u$; jam vero ex relatione $p:q::z:c$; quæ proportio ad infinitesimas redacta dat $u = \frac{qa}{p} = \frac{tfya}{hzz}$, unde $tfpy = qhzz$, seu (quia $qz = pc$,) $t = \frac{hcz}{fy}$.

 66. Et

66. Et factâ suppositione generaliori, $p^k : q^s :: z^k : v^s$, erit hæc redacta ad infinitesimas, $szu = kca$, quæ comparata, cum æquatione omnibus hisce curvis communi, (vide prægress.) $tfya = hzzu$, dabit $t = \frac{khcz}{syf}$; unde mediante æquatione relationem exprimente $c$ potest tolli, & $t$ per rectas exprimi.

67. Quod si $EFG$ ad circulum determinetur, erit $A$ B $CD$ ex Spiralibus quædam, ipsaque $OK$ ex naturâ circuli infinita, adeoque $f = h$; ut & ob eandem rationem $y = r$ radio; quare hoc casu $t = \frac{kcz}{sr}$.

Aliarum Spiralium tangentes, cum post hæc nihil difficultatis habeant, transilio.

68. Quia autem occurrunt quandoque curvæ, quæ tum ad determinatum aliquod punctum, simul & ad lineam velut axem referuntur; unde suppositæ infinitesimæ quodammodo intricari videntur, præmittam his in casibus generale lemmaticum.

Sint in figuris appositis *XIX*, N°. 1. & *XIX*. N°. 2. curvæ *AHR*, mediantibus rectis B *A* & B *H*, ad punctum B; & ope parallelarum *AD* & H *L* ad axem B *D* relatæ; sit B *E* ipsi B *A* normalis, & *AM* tangat curvam; vocenturque *A*B: $z$, B*D*: $x$,

*MD*:

$MD:h$, $MA:k$, B$E:t$, $AD:y$, $AE:s$, infinitesimæ $A$H$:u$, $AI:i$, H$I:o$, $AK$ in fig. No. 1, sit $e$, & $K$H$:a$, ast No. 2. $AK:a$, $K$H$:e$. emergent, quæ sequuntur, æquationes, $a = \frac{ki}{h} = \frac{ko}{y} = \frac{se}{t} = \frac{sa}{z}$.

Unde duarum quarumlibet infinitesimarum ratio in aperto est; hoc est: Io. $a:e::z:t$. IIo. $a:i::z:\frac{sh}{k}$, quo facto $=p$; erit $a:i::z:p$. IIIo. $a:o::z:\frac{sy}{k}$, quo facto $=l$; erit $a:o::z:l$. IVo. $e:i::t:p$. Vo. $e:o::t:l$. VIo. $i:o::h:y::p:l$.

Quo vero $p$ & $l$ inveniantur, ductâ $EG$. parallelâ $D$B, & (*Fig. XIX.* No. 2.) productâ $DA$ in $G$, erit $EG=p$ & $GA=l$.

Quin & propter triangulorum $DA$B & $FE$B similitudinem, est $z:y::t:\frac{ty}{z}$ $EF$; cui si addatur $G$F$:x$, erit $GE$ seu $p=\frac{ty}{z}+x$, & ob eandem rationem erit $GA$ (*Fig. XIX.* No. 1,) seu $l=y-\frac{tx}{z}$, & (in *Fig. XIX.* No. 2,) $l=\frac{tx}{z}-y$.

69. Sit *Fig. XX*, curva $IC$B$A$, & recta $IN$, in quâ designatum punctum $N$. recta $NA$ sit positione data; item alia curva I H $G$ F ita ad priorem relata, ut, a puncto $N$ ductâ quâlibet rectâ $NG$B; ac deinde ex puncto $G$ lineâ $GR$ ipsi $NA$ parallelâ, habeat intercepta I$R$ ad curvam

I B

I B rationem semper eandem, ut $p$ ad $q$; sit $LN$ ipsi $N$ B normalis, recteque B L & $GM$ respectivas curvas tangant; quæritur $MN: t$; data sint LB: $f$, LN$h$, GN: $z$, BN: $y$, IR: $x$, RN: $l$. curva IB: $c$, GR: $b$, PS: $n$, tum infinitesimæ, BC: $u$, BD: $o$, HE: $a$, EG: $e$, HK: $i$, erit $z : e :: y : o$, item $f : h :: u : o$, unde $o = \frac{ey}{z} = \frac{hu}{f}$; & hinc $u = \frac{fye}{hz}$.

Jam ex curvarum relatione $p : q :: x : c$, unde $\frac{qi}{p} = u = \frac{fye}{hz}$, quare $\frac{pfye}{qhz} = i$; jam vero juxta præcedentem $e : i :: t : \frac{tb}{z} + l$, unde $i = \frac{tbe + lze}{tz} = \frac{pfye}{qhz}$, & tandem $t = \frac{qhlz}{pfy - qhb}$.

70. Si jam IBAN sit quadrans circuli, & ratio $p$ ad $q$ sit ratio radii $r$, ad peripheriæ quadrantem $d$, erit IHGF Quadratrix veterum, ac $p$ & $y$ & $r$ æqualia, item $q = d$ & $h = f$ ob infinitam puncti L distantiam, unde $t = \frac{dlz}{rr - db}$. & si quæratur linea PN invenietur $= \frac{dzz}{rr}$.

71. Si relatio data fuerit $p^k : q^s :: x^k : c^s$. tangens ex anterioribus elucescet.

*Schol:* Et huc quidem usque ea potissimum quæstio ventilata fuit, quâ recta inquirebatur in dato puncto curvam datam tangens. Unde Verbi Gr: Fig. X, 5, ex data curvæ *ADE* proprietate, ipsisque A Q, QD, seu $x$ & $y$ datis (dato enim puncto $D$, & hæc data sunt) invenire necessarium fuit, trianguli rectilinei $TQD$ proprietatem, aut ratio-

nem

nem, quam inter sese habent TQ & QD, seu intercepta & applicata ejusdem trianguli. Cum autem multis quidem modis hæc quæstio possit variari, petique, ut, dato in triangulo *TDQ* puncto *D*, inveniatur curva *ADE*, ipsam rectam *TE* in dato puncto contingens: unde tum curvæ parameter, item AQ seu *x*, post generalem curvæ naturam cognitam investiganda forent. Quin & plurimis modis diversa, circa rectas curvasque semutuo tangentes, quæri possent, pro eorum diversitate, quæ tanquam data supponuntur. Hæc vero licet ex facili, præcedentibus perceptis, consequantur, in tyronum gratiam unum aut alterum exemplum addemus.

72. Sit *Fig. X*, recta *TD* in infinitum versus *E* protensa, ejusq: positio respectu lineæ *TS* data, in eâque assignatum punctum *D*, oportet curvam *ADE* hanc rectam in *D* tangentem designare. Ductâ ex *D* rectâ *DQ* ipsi *TQ* normali, aut ad quemlibet datum angulum, sit ex trianguli *TQD* proprietate (factâ *TQ*:*t*, & *QD*:*y*) perpetuo $p:q::t:y$, unde æquatio trianguli $pt = qy$, vocatisque ut supra, $QP = DH: e$, & $EH: a$, erit hæc reducta ad infinitesimas $qe = pa$, quæ in omnibus hisce casibus obtinet.

Jam quæratur parabola *ADE* ipsam rectam *TD* in puncto *D* tangens, cujus æquatio $rx = yy$, facto $AQ: x$; dabit hæc ad infinitesimas redacta $re = 2ay$; unde $a = \frac{re}{2y} = \frac{qe}{p}$. unde cum *p* & *q* item *t* & *y*, in triangulo data sint (trianguli enim proprietas & punctum *D*.

*D.* datum est) invenietur parameter parabolæ $r = \frac{2qy}{p} = \frac{yy}{x}$ ex naturâ parabolæ, unde $x = \frac{py}{2q} = \frac{t}{2}$. quare ex cognitâ *AQ* seu $x$ & latere recto parabolæ ea poterit describi.

73. Expetatur jam *ADE* circulus, cujus æquatio $2rx - xx = yy$, quæ rectam *TE* in *D* contingat: ea reducta ad infinitesimas erit: $\frac{re - xe}{y} = a = \frac{qe}{p}$; unde circuli semidiameter $r = \frac{qy + px}{p} = \frac{yy + xx}{2x}$ ex æquatione circuli; ex quibus tum $x$, tum $r$ in quantitatibus cognitis dabuntur, uti notum est.

74. Quod si hyperbola dictam *TE* tangens in *D* desideretur, cujus æquatio, $rxx + rhx = hyy$, posito latere ipsius recto $= r$, transverso $= h$; erit hac ad infinitesimas redactâ, $\frac{2rxe + rhe}{2hy} = a = \frac{qe}{p} = \frac{ye}{t}$ ex æquatione trianguli, unde $r = \frac{2hyy}{th + 2tx} = \frac{hyy}{xx + hx}$ ex quibus $r$ & $x$ innotescent. Cum autem ad ipsam $h$ determinandam æquatio non suppetat, ea manebit hoc in casu non omnino limitata.

Unde, licet hyperbola *ADE* in puncto sui *D* unicam tantum admittat tangentem rectam, è contrario recta data *TE* in puncto sui *D* innumeras habet hyperbolas tangentes, prout hæc

aut

aut illa ex ipsis $x$, $r$, & $q$ (quarum non nisi duæ per æquationes inventas definiri possunt) arbitraria remanserit.

Posset jam eadem hæc quæstio rursus mutatâ facie proponi, ac ex datâ tum curvæ, tum trianguli proprietate punctum contactus mutui investigari; quæ tamen, ut & alia huc spectantia, cum prioribus intellectis nullam fere difficultatem (unico casu excepto, ubi cæteris datis curvæ natura quæritur) habeant, hic prætermittimus.

Cum autem non inter rectas tantum & curvas, verum & inter duas curvas, aut plures, contactus mutuus possit celebrari, licet hoc problema per communem ac omnes curvas eodem sui puncto tangentem rectam exiguo satis labore efficiatur; rem forsan tyronibus utilem præstitisse videbor, si quo pacto ex traditæ methodi generali lege effectum dari possit, paucis demonstravero; cæteris speculationibus, quæ hinc originem ducere possunt, in locum commodiorem relegatis.]

75. Sit ergo *Fig. XXI.* No. 1, curva *ADE* data; & in eâ punctum *D*. Oportet ei ducere curvam *TDE* tangentem.

Resumantur symbola ordinaria, fiatque $AQ:x$, $QD:y$, infinitesimæ, $DH = QE:e$, $EH:a$, $DE:u$, subtangens $TQ:t$. quapropter, si curva exposita *ADE* sit circulus, cujus æquatio $2rx - xx = yy$, ac debeat duci ex parabolis quædam *TDE*, circulum parte sui convexâ tangens; sit ipsius æquatio $tt = ky$; erit redactâ utrâque ad infinitesimas $\frac{re - xe}{y} = a = \frac{2te}{k}$, & æquatio ad tangentem determinata $kr - kx = 2ty$

quæ

quæ cum alia æquatione $tt = ky$ combinata, dabit post debitam reductionem, $t = \frac{2yy}{r-x}$ & hac cognitâ latus rectum parabolæ $k = \frac{2ty}{r-x}$.

76. Quod si expetatur: parabola parte sui concavâ circulum tangens, *Fig.* XXI, No. 2, & ejus æquatio $kt = yy$; quæ cum æquatione circuli redacta ad infinitesimas erit: $2re - 2xe = ke$; unde latus rectum $k = 2r - 2x$ ejusque intercepta *TQ* seu subtangens quæsita $t = \frac{yy}{2r-2x}$.

77. Manente *ADE* circulo, & suppositâ *TDE* ex hyperbolis aliquâ, sit hujus æquatio, $ktt + kht = hyy$; emerget ex utriusque curvæ æquatione ad infinitesimas redacta, $re - xe = ya$; tum $2kte + khe = 2hya$; unde $2hr - 2hx = 2kt + kh$; quæ æquatio cum hyperbolæ æquatione debitè tractata dabit, tum $t$ subtangentem, seu hyperbolæ interceptam; tum $h$ aut $k$ alterum ex hyperbolæ lateribus, altero manente indeterminato. Unde patet circulum innumeris hyperbolis uno in loco tangi posse. Sed hæc sufficiant.

*Schol.* Plures quidem in præcedentibus infinitesimas adhibuimus; sed in singulis curvis, non nisi eas, quæ *Fig.* XXIII, No. 1, triangulum *DEH* constituunt; cum autem hisce non coërceatur hæc methodus, sed & aliæ ac plures in calculum deduci queant, quæ eandem cum modo recensitis curvam spectant; nimirum ductâ præter

tan-

tangentem *TD* insuper recta *BE*, curvam *ADE* tangenti in *E*, tum *TC* ipsi *BE* perpendiculari, erit juxta lemmata præmissa triangulum *BTC* pariter ex infinitesimis compositum; quin & *Fig. XXII.* ductis *DR* ac *ES*, tangentibus *TD* ac *BE* normalibus, erit his intercepta axis portio *RS*, aliæque quam plurimæ *HA*, *AE*, &c. ex infinitesimarum genere; quarum considerationem, cum tangentium doctrinam multum promoveat, quin & curvarum mixtilineorumque mensuras immane quantum adaugeat, his annectere methodique hujus universalitatem, ac majorem longe, quam prima fronte promittere videtur, extensionem demonstrasse forsan non infructuosum fuerit; insimulque non ubique obvium theorematum fontem hoc rivo scaturientem ostendisse; modo, quod hoc in labyrintho filum est Ariadnes, inter infinitesimas, ac quantitates rejectaneas ex legibus lemm. 10. &c. exactè distinguatur.

78. Sint *Fig.* XXII. ut supra, *TQ*: *t*, *AQ*: *x*, *QD*: *y*; Infinitesimæ *DH*: *e*, *HE*: *a*, *DE*: *u*, *DR* tangenti *DT* normalis; *BE* sit ea linea, quæ tangat curvam in *E*; puncto ipsi *D* proximo, & huic perpendicularis *ES*. erunt, juxta lemm. 18, *BT*: *i*. tum *RS*: *o*, pariter infinitesimæ.

Detur jam curva *OML* ejus naturæ, ut, ductis *DM*, *EL*, &c. ipsi *AO* parallelis, sit continuo *IM* æqualis *TQ*, & *GL* æqualis *BP*; erit, facta *XM* ipsi *GI* æquali & æquidistanti, lineola *XL*, seu differentia linearum *GL* & *IM* æqualis *BT* + *QP* seu *e*+*i*, & *MX* = *a*. Sit insuper alia curva *ZKV* illius proprietatis; ut ejus applicata *QK* ipsam *QR* seu *l*, & *PV* ipsam *PS* seu *l* − *e* + *o* constanter adæquet; erit *KN* parallela *QP*: *e*, & *NV* semper æqualis *RS* − *QP* seu, *o* − *e*, tangat autem *MY* curvam *OML*, sitque *IY*:*h*. quæritur *QC*:*k*, tangentem curvæ *ZKV* determinans.

 Hinc

Huic scopo tot quærendas esse æquationes, quot assumtæ fuerint infinitesimæ, ex anterioribus manifestum est. Harum I°. $ye = at$. II°. $le = ay$. Quarum ratio jam sæpius insinuata. III°. $BP : PE :: PE : PS$, seu, $t + e + i : y + a :: y + a : l + o - e$, unde rejectis juxta §. 6 & 7, rejiciendis $li + le + to - te = 2ay$; & quia $le = ay$, restat $li + to - te = ay$. IV°. $CQ : QK :: NK : NV$. seu $k : l :: e : o - e$, unde $ko - ke = le$. V°. $YI : IM :: MX : XL$. $h : t :: a : e + i$, unde $at = he + hi = ye$ ex primâ, ergo ex tertiâ & quartâ, erit $o = \frac{ay + te - li}{t} = \frac{ke + le}{k}$; unde, facto $le = ay$, orietur $e = \frac{ki}{k - t} = \frac{hi}{y - h}$ ex quintâ; quare tandem $k = \frac{ht}{2h - y}$.

79. Notetur, ut habeatur ratio infinitesimarum $QP$ & $BT$ seu $e$ & $i$, ex præcedenti esse $h : y - h :: e : i$; tum etiam $k : k - t :: e : i$. Item si ratio $QP$ ad $RS$ seu $e$ ad $o$. expetatur, eam hoc analogismo exprimi, $k : k + l :: e : o$; juxta IV. æquationem præcedentis.

80. Iisdem positis jam loco $l$, applicetur eadem $t$ ad $e$, seu $TQ$ in $QK$, & $PB$ in $PV$, donec per puncta $K$, $V$, &c. describi possit curva $ZKV$. quæritur $QC$ seu $k$, quæ tangentem $CK$ patefacit. Cum sit $QK : t$, & $PV : t + e + i$,

erit

erit differentia $NV: e+i$; ideoque $CQ:QK::KN:NV$. $k:t::e:e+i$, unde $\frac{te}{k}=e+i$. sed in curva $OML$ est $IY:IM::MX:XL$; seu $h:t::a:e+i$; quare $\frac{ta}{h}=e+i$; & hinc $\frac{te}{k}=\frac{ta}{h}$, & $e=\frac{ka}{h}=\frac{ta}{y}$, ac tandem $k=\frac{ht}{y}$.

81. Hinc facile patet, si, relatione curvæ $LMO$ pro lubitu assumtâ, inveniatur juxta canones prægressos linea $YI$ seu $h$; ac curva $ZKV$ ejus naturæ statuatur, ut $QK$ quælibet perpetuo æquetur ipsi $IM$ seu $g$; fore semper $QC$ seu $k=\frac{ht}{y}$.

82. Notetur hujus ope methodum §. 35, propositam ampliari, ac etiam *Fig. XXIII.* N°. 1. ad curvas $PLI$ applicatam $EP$ pro axe habentes extendi; cum loco citato omnes ad eundem axem $AQ$ descriptæ esse fuerint suppositæ. Sit, verb: gr: $QA:z$; $HL:f$; $DQ:y$; ac mutua curvarum relatio $fz=yy$; erit factâ $QZ=HL=f$, vocatisque subtangentibus $QY:n$, $QW:k$, $HF:h$; juxta §. 37, $nt+tk=2kn$; sed ex præcedenti $k=\frac{ht}{y}$; unde emerget æquatio pro subtangentibus hoc in casu determinandis $nty+tth=2htn$.

83. Sit *Fig. XXIII.* N°. 1. curva $ADE$ cum superiori eadem, eademque symbola; $r$ sit li-

 nea

nea determinata; fiatque $y:t::a:e::r:z$, quæ $z$ applicetur in $HS$, ad $EH:a$, idque perpetim, donec per omnium applicatarum extremitates describi queat curva $RSS$. Quæritur $HK:d$, unde ducta $KS$ curvam $RSS$ contingat. est $MS:a$, sitque $MR:\theta$; erit I°. $HK:HS::MS:MR$. $d:z::a:\theta$, & hinc $d\theta = za = re$, ex hypothesi.

*II^{do}*. Posità curvâ $ILP$ ejusmodi, ut $HL$ sit constanter æqualis ipsi $QT$ seu $t$; ductâque $FL$ eam tangenti sit $FH:h$, erit, juxta §. 78, $FH:HL::GL:GI$. seu $h:t::a:e+i$, unde $he+hi = at = ye$.

III^{tio}. Redactâ æquatione datâ ad infinitesimas, erit $PE:PB::r:ER$, seu $y+a:t+e+i::r:z+\theta$; unde remotis per §. 6 & 7, rejectaneis, $za+y\theta = re+ri$; & quia $za = re$, est $y\theta = ri$; unde $\theta = \frac{ri}{y} = \frac{re}{d}$ adeoque $e = \frac{di}{y} = \frac{hi}{y-h}$, ac ultimo quæsita $d = \frac{hy}{y-h}$.

84. Repetitis omnibus, sit $t:y::e:a::r:f$; applicetur continuo $f$ ad $e$, seu $QZ$ ad $QP$, ut hac ratione constituatur curva $ZX$; cujus ducenda sit tangens $WZ$. sit $QW:b$, infinitesima $VZ:\lambda$, erit $QW:QZ::VX:VZ$. $b:f::e:\lambda$. unde $fe = b\lambda$.

II^{do}. Sit curva $A\Lambda$ talis naturæ, ut $Q\Lambda$ perpetuo ipsi $QT$ seu $t$ æqualis sit; & $QY:n$, unde ducta $Y\Lambda$ curvam $A\Lambda$ tangit; erit $QY:Q\Lambda::\Lambda N:N\Delta$, seu $n:t::e:e+i$. ergo $te = ne+ni$;

&

& redacto analogismo dato ad infinitesimas fiet, $BP : PE :: r : PX$. seu $t + e + i : y + a :: r : f - \lambda$; quare $fe + fi - t\lambda = ra$; &, quia $ra = fe$, fit $fi = t\lambda$. unde $\lambda = \frac{fi}{t} = \frac{fe}{b}$, ideoque $e = \frac{bi}{t} = \frac{ni}{t-n}$, denique $b = \frac{tn}{t-n}$.

85. Sint *Fig.* XXIII. N°. 1, curvæ *ADE*, ILP, cum præcedentibus eadem, eademque symbola; curva vero *RSS*, habeat applicatam H*S* tangenti *DT* seu $s$ perpetuo æqualem. quæritur HK tangentem KS definiens.

Quoniam $DE = u$, & infinitesima; erit ductâ *DO* ipsi *BE*, quæ curvam in *E* tangit, normali, $EO = ED = u$. juxta lemm. 42; ac ducta *CT*, parallela *DO*, hoc est ad eandem *BE* perpendiculari, erit $EC = ET = s + u$ ex lemm. 36; sit porro $CB : \lambda$ infinitesima ex lem. 18, erit $BE = s + u + \lambda = ER$; quare ob parallelas & æquales *E*H, *MS*, fiet *MR* seu *RE* − H*S* $= u + \lambda$: tandem HK vocetur $c$.

Est HK: HS:: *MS*:*MR* seu $c : s :: a : u + \lambda$, quare $\lambda = \frac{sa - cu}{c}$; jam vero, ob angulos *CTE* & *TCE* ex lemm. 33. rectos & æquales, erunt triangula *BCT* & *TQD* similia; quare $TD : TQ :: BT : CB$. seu $s : t :: i : \lambda$, unde $\lambda = \frac{ti}{s} = \frac{sa - cu}{c}$, & hinc $\frac{ssa - cti}{sc} = u = \frac{sa}{y}$

 (nam

(nam $TD$, $s$ : $DQ$, $y$ :: $DE$, $u$ : $EH$, $a$) quare $a = \frac{ctyi}{ssy - ssc} = \frac{ye}{t}$ (quoniam $TQ$, $t$ : $QD$, $y$ :: $DH$, $e$ : $EH$, $a$) ergo $\frac{ctti}{ssy - ssc} = e = \frac{hi}{y - h}$ (juxta §. 79.) unde $c = \frac{ssyh}{tty + ssh - tth}$, & facto $ss - tt = yy$, est $c = \frac{ssh}{tt + yh} = HK$. Exempla non addo particulares casus concernentia.

86. Cum vero omnia hæc in curvis versus axem concavis ostensa sint; eæque, quæ versus axem convexæ sunt, *Fig. XXIII.* N°. 2. aliquid in infinitesimarum positione a prioribus diversum obtineant, è re forsan erit prægressum problema hoc in casu solvere, undę cætera innotescent. Positis ergo omnibus, ut in præcedenti, quæ tum linearum, tum infinitesimarum pariter ac curvarum $ADE$, $ILP$, $RSS$ naturam ac relationem mutuam spectant: notetur hoc in casu, $GI$ esse $= e - i$, cum enim sit $TQ = HL = t$, ac $BT = i$, item $QP$ : $e$, erit $BP = t + e - i = EI$, unde $GI = e \quad i$.

Secundo, quia $DT = HS = s$, & $CT = \lambda$, $DE = Do = u$, erit $CE = BE = ER = s + u - \lambda$; quare $MR = u - \lambda$, hoc in casu.

Ut ergo $HK$ seu $c$ determinetur est $HK$, $c$ : $HS$, $s$ :: $MS$, $a$ : $MR$, $u - \lambda$. Quare $\frac{ci - c\lambda}{c} = \lambda, = \frac{ti}{s}$ ob an-

angulum $EBC$ rectum, tum in triangulis $DEH$ & $TDQ$ similibus est. $s:y::u:a$ unde $u = \frac{sa}{y}$, item $t:y::e:a$ unde $a = \frac{ye}{t}$.

Jam in curva $ILP$ est $FH:HL::GL:GI$, seu $h:t::a:e-i$, unde $he - hi = ta = ye$; ex quibus tandem æquationibus, elisis infinitesimis, orietur, ut supra, $c = \frac{ssh}{tt+yh}$.

*Schol.* Atque hac quidem occasione in speculationem quandam circa curvarum flexus & curvaturas insperatò dilabimur; quæ tum à veteribus, tum etiam à recentioribus Mathematicis inter primarias licet habita, nunquam tamen, quantum mihi constat, hoc fonte derivata, hac saltem ratione tractata fuit: quâ levi satis negotio, & magis forsan directè, quam ex radicum æqualitate, ex cujuslibet curvæ æquatione cognitâ dignoscitur curvæ specialis indoles, ipsiusque versus axem aut quamlibet expositam rectam concavitas aut convexitas, tum & punctum, si detur, flexûs contrarii.

87. In *Fig.* XXIII. N°. 1 & 2. curva $ADE$; patet ex iis, quæ lemm. 23, &c. demonstrata sunt, omnes curvas ex tangentium $TD$, $BE$ portionibus infinitesimis $DE$, $E\varphi$ componi, quæ angulos in $E$ efformant, unde clarum satis est, si modo dicti à tangentibus efformati anguli $DE\varphi$ concavum suum versus axem $AQ$ convertant, curvam versus $AQ$ fore concavam, *Fig.* XXIII. N°. 1. si vero apicem suum axi $AQ$ obvertant recensiti anguli, uti *Fig.* XXIII.

No. 2, curvarum versus eandem *A* Q fore convexam; adeoque & hos angulos curvaturarum solas normas existere.

Quo posito, figuras obiter inspicienti apparet, si recta *TDE* supponatur tangere curvam aut ei cöincidere in rectulâ infinitesimâ *DE*, proximam huic infinitesimam *E Q* versus axem in *B* prolongatam, ab eodem abscindere infinitesimam *BT*; hac quidem differentiâ in utrâque curvâ, ut, I^to^. Vocatis subtangenti primâ *T*Q: $t$, tum *QP*: $e$ & *BT*: $i$. si curva *ADB*, *Fig.* XXIII, N°. 1, sit versus *AQ* concava, sit subtangens secunda *BP* $= t + e + i$; ast *Fig.* XXIII. N°. 2, ubi curva versus *A*Q est convexa, *BP* $= t + e - i$. II^do^ Tum & tangenti *TD* vocatâ $s$, ac *DE* $=$ *OE*: $u$, item B*C*: $\vartheta$, patet in curvâ versus axem concavâ, *Fig.* XXIII. N°. 1, tangentem secundam B*E* fore $= s + u + \vartheta$; in altero vero casu, ubi curva versus axem convexa existit, B*E* $= s + u - \vartheta$.

Ex quibus duobus criteriis manifestus consequitur character curvarum quarumlibet curvaturam, respectu axis, quem respiciunt, dignoscendi, modo perspectum habeamus, num subtangens secunda B*P* per $t + e + i$, num vero per $t + e - i$ in expositâ curvâ sit denotanda.

88. Quod

88. Quod ut in curvâ qualibet geometricâ indagemus, insimulque convexitatis aut concavitatis curvarum notas diagnosticas ad quantitates positivas, cum §. præced: non nisi per infinitesimas explicatæ fuerint, referamus: concipiatur in utrâque figurâ nova descripta esse curva $PIL$ hujus naturæ, ut $E$I ipsi B$P$, tum H$L$ ipsi $TQ$, singulæque porro curvæ $PLI$ applicatæ respectivis curvæ $ADE$ subtangentibus jugiter adæquentur; ductâque recta $F$L$I$ ipsam in L tangenti vocetur subtangens $F$H: $h$; ac cum ex naturâ curvæ sit H L: = $t$, positâ infinitesimâ $G$ L = E H = $a$, erit infinitesima $GI$ in *Fig.* XXIII. N°. 1, = $e+i$, in *Fig.* XXIII. N°. 2. = $e-i$; est enim in utrâque ipsa $GI$ subtangentium $BP$ & $TQ$ differentia, uti patet.

Jam autem cum sit perpetuo F H: H L:: G L: G I. seu vocando G I generali appellatione = $o$, (quæ tum per $e+i$, tum per $e-i$ pro rerum exigentiâ poterit explicari) $h$:$t$:: $a$:$o$. erit $ta = ho$; sed est $ta = ye$ ex curva $ADE$; (cum sit $TQ$: $QD$:: $D$H: $E$H. seu $t$:$y$:: $e$: $a$.) ergo tandem in utroque casu perpetim invenietur, $ye = ho$.

89. Quapropter, ut ad rem propius accedamus, cum in *Fig.* XXIII. N°. 1, ubi curva *ADE* versus axem AQ concava est, sit *GI* seu $o = e + i$, erit $ye = ho = he + hi$, & æquatione in analogismum resolutâ $y - h : h :: i : e$. unde patet hoc in casu *h* esse minorem ipsâ *y*.

Si vero, uti *Fig.* XXIII. N°. 2, curva *ADE* versus AQ convexa est, erit *G*I seu $o = e - i$, adeoque $ye = ho = he - hi$, seu $hi = he - ye$, & æquatioue ad proportionem redactâ $h - y : h :: i : e$. unde patet rursum hoc in casu contrarium evenire, ac *h* esse majorem ipsâ *y*.

90. Unde tandem, vocatâ curvâ *PL*I *curvâ subtangentiali* ex proprietate superius memoratâ, hic emergit in curvis quibuslibet curvaturarum character.

Si ad curvæ cujusvis *ADE* ordinatam *EP* applicetur curva subtangentialis *PL*I. Hujusque subtangens F*H* seu *h* fuerit minor curvæ expositæ applicatâ *y*; erit curva *ADE* versus axem suum AQ concava.

Si vero fuerit subtangens *h* major ipsâ *y*, contrarium obtinebit, ac curva *ADE* versus axem suum AQ erit convexa.

91. Quod si *Fig.*XXIII.N°.1, TQ & *BP* non in *HL* & *E*I. ad ordinatam *EP* seu *y*, sed in QΔ & *P*Δ ad interceptam AQ seu *x* applicentur; erit hoc in casu *A*ΔΔ curva subtangentialis, in quâ

Q

$QA = t$, $AN = e$, $N\Delta = o$, vocetur etiam $TQ$ subtangens hujus $= k$, erit $k : t :: e : o$, & $te = ko$.

Unde si sit $o = e + i$, ac curva $ADE$ versus axem concava, erit $te = ke + ki$ & $te - ke = ki$, quare $k$ minor ipsa $t$.

Quod si $o = e - i$, est $te = ke - ki$, & $ki = ke - te$, adeoque $k$ major ipsa $t$.

Et sequens oritur curvarum flexuræ diagnosticum in casu, quo curva subtangentialis $A\Delta\Delta$ ad curvæ interceptam $AQ$ applicata est,

Si fuerit subtangens $k$ minor ipsâ curvæ expositæ subtangenti $t$, erit curva $ADE$ versus axem suum concava.

Si vero $k$ fuerit major ipsâ $t$, erit curva $ADE$ versus axem suum convexa. NB. Potuisset & hoc ex §. 80 & 81 elici, cum ibi demonstretur esse $k : t :: h : y$.

*Coroll. I.* Patet ex duabus præcedentibus, si subtangens $t$ curvæ $ADE$, cujus flexus quæritur, explicetur per interceptam $AQ$ seu $x$, commodissime adhiberi præcedentem; si vero per applicatam $y$ designetur subtangens $t$, inquisitioni curvaturæ potius inservire §. 90.

*Coroll. II.* Quo vero methodi hujus usus per exempla pateat, sit curva, cujus intercepta $x$, applicata $y$, subtangens $t$, ejusque æquatio $2rx - xx = yy$ ad Circulum. Quæritur ejus curvatura versus interceptam $AQ$.

Erit

Erit ex §. 35, æquatio ad tangentem $yy = rt - xt$, quæ reducta ad $x$ fiet $2rx - xx = rt - xt$; sed per $y$ designata fiet $rrtt - yytt = y^4$. quarum prima *Fig.* XXIII. N°. 1, est æquatio subtangentialis seu curvæ $A\Delta\Delta$ ad axem $AQ$; secunda erit æquatio subtangentialis seu curvæ $PLI$ ad applicatam $EP$ positæ.

Resumendo ergo primam $2rx - xx = rt - xt$ erit ex §. 17, $TQ$ seu $k = \frac{rt - xt}{2r - 2x + t}$; quæ inquiratur num sit major aut minor quam $t$, juxta præcedentem, quare si sit $k$ seu $\frac{rt - xt}{2r - 2x + t}$ major aut minor ipsa $t$; sequetur tandem (eas quantitates instar æqualium tractando, hoc enim fieri posse cuivis notum est) fore etiam nihilum majus aut minus ipso $rr$; ac cum constet nihilum esse minus ipso $rr$, nec nunquam ei æquari posse; etiam consequitur $k$ ipsâ $t$ semper minorem esse; adeoque juxta §. 91, curvam $ADE$ fore versus axem suum concavam.

*Coroll. III.* Idem sequenti modo colligi potest ex æquatione subtangentiali ad $y$ reducta, quæ est $rrtt - yytt = y^4$; posita nimirum $t$ ad $y$ in curva $PLI$ applicari, cujus subtangens $h = \frac{rrtt - yytt}{2y^3 + tty}$; quæ inquiratur num sit major aut minor quam $y$, juxta §. 90, invenietur ipsa

ipsa $b$ minor ipsâ $y$; adeoque per §. 90, curva exposita erit versus axem $AQ$ concava.

*Coroll. IV.* Sit curva, cujus æquatio, $ry = xx$ erit æquatio curvæ subtangentialis ad $y$ appositæ $ry = 4tt$, cujus curvæ subtangens $b$ invenietur major ipsâ $y$, adeoque curva exposita versus axem erit convexa, ex §. 90.

Idem circa $k$ & $t$ comperietur, si subtangentialis curva ad $x$ fuerit applicita.

92. Et hæc quidem circa concavitatis aut convexitatis curvarum dignotionem, quando $b$ aut $k$ ipsâ $y$ aut $t$ minor aut major existit; ubi autem ea emergit quantitatum, $b$ & $y$, tum $k$ & $t$ inter se relatio, ut non tantum se invicem utrinque excedere, verum & sibi mutuo æquari possint; sequetur in casu hoc æqualitatis curvam nec convexam nec concavam esse (secus enim una alteram excederet juxta §. 90 & 91.) adeoque & hac ratione punctum flexionis contrariæ in qualibet curva determinari; eo enim loco curva versus axem nec convexa nec concava est.

Sit in exemplum *Fig.* XIII. No. 2, Conchois Nicomedis polo $K$, normâ $FG$ descripta, vocatâque $FK: s$, tum $AF = LD: r$, $QF: x$, $QD: y$, item $TQ$ subtangenti: $t$, erit æquatio proprietatem ipsius exprimens $xxyy = rrxx + 2srrx - x^4 - 2sx^3 - ssxx$.

Unde

Unde juxta regulas §. 17 & 35, traditas, ac ope æquationis curvæ elisâ $y$, emerget subtangentis $TQ$ valorem manifestans æquatio, post debitam per $2x + 2s$ depressionem, ea, quæ sequitur:

$$rrxx + srrx - x^4 - sx^3 = -srrt - tx^3,$$

quæ, positâ perpetim $TQ$ seu $t$ in $QC$, subtangentialis curvæ $ACG$ naturam prodet. Cujus rursum subtangens $QR$ seu $k$ ex regulis modo citatis hâc ratione determinabitur,

$$\frac{-srrt - x^3 t}{2rrx + srr - 4x^3 - 3sxx + 3txx} = k.$$

qui ipsius $k$ valor, si supponatur major aut minor aut æqualis ipsi $t$, colligetur etiam esse $\frac{-2srr + 3x^3 - 2rrx + 3sxx}{3xx}$ esse majorem, minorem, aut æqualem ipsi $t$, hoc est invento ipsius valori, $\frac{rrxx + srrx - x^4 - sx^3}{-srr - x^3}$.

quibus denuo quantitatibus ex æquationum lege comparatis, ac per $s + x$ divisis, emerget fore $2srr$ majorem, minorem, aut æqualem, ipsis $3sxx + x^3$; quæ omnia, cum pro variâ

ipsius

ipsius $x$ determinatione sint possibilia, aperte consequitur:

I. Si $2srr$ sit minor ipsis $3sxx + x^3$, fore $k$ minorem $t$; adeoque curvam versus axem $AF$ concavam.

II. Si contrarium eveniat, fore convexam.

III. Si sibi mutuò æquentur, seu si sit, $2srr = 3sxx + x^3$, curvam in hac ipsius $x$ magnitudine fore nec concavam nec convexam; verum hac æquatione ipsum curvæ flexus contrarii punctum definiri.

*Schol.* Placuit hoc potius Conchöidis exemplo præ aliis uti; cum inter problemata illustria à præstantissimis hujus ævi Mathematicis numeretur; tum & canonum superius traditorum in inquirendis subtangentibus præcepta sequi; ut, quod ante circa signorum notationem insinuavimus, apertius pateat. Ipsam enim $t$ continuo negativo valore expressam esse, cum a contrariis ipsius $x$ partibus respectu applicatæ $QD$ inveniatur, nemo non videt, ac nihilo secius signa, ex canonum legibus oriunda, servando ad æquationem legitimâ signorum qualitate affectam deveniri.

Possent & in modum §. 37 & 38, hæc infinitis curvis simul & semel unâ opera applicari, ac licet subtangens $t$ per quaslibet aliarum curvarum applicatas designaretur, idem effici; unde ipsam $t$ ad expositæ curvæ abscissam ordinatamve $x$ aut $y$, quod hisce exemplis perpetuò factum fuit, primo referre necessarium non erit: verum hæc, cum satis leviter ex ante dictis eruantur, compendii gratiâ, privato cujuslibet studio committimus.

93. Nescio an operæ futurum sit pretium speculationem quandam, quam per otium ulterius perficere mihi animus fuerat, hic adjungere circa *methodum tangentium inversam*; qua satisfit huic problemati: *Dato valore lineæ cujuslibet subtangentis* (*seu*, Fig. XXII. *ipsius* TQ *inter applicatam* DQ *tangentemque* DT *interceptæ*) *in terminis æquationis proximis, invenire curvæ huic valori convenientis æquationem.*

Quos autem terminos æquationis *proximos* appellem, exemplo potius manifestabitur: sit Fig. XXII. TQ: $t$, AQ: $x$, QD. $y$, TD: $s$, curva $AD$: $z$, cujus æquatio $y^3 + fyy = x^3 + rxx$, erit juxta §. 17 aut 35, subtangens TQ seu $t = \frac{2y^3 + 2fyy}{3xx + 2rx}$; hos terminos subtangentis valorem exprimentes *proximos* dico, siquidem ex æquatione curvæ proxime dimanantes; si vero hic subtangentis valor per applicationem æquationis curvæ immutetur, Exemp: Grat: ponendo $3y^3 = 3x^3 + 3rxx - 3fyy$ adeoque $t = \frac{3x^3 + 3rxx - fyy}{3xx + 2rx}$; hos voco terminos *remotos*. Idem in cæteris casibus judicium fiet.

Jam vero ne subtangentis valore dato, dubium circa hanc terminorum distinctionem oboriatur, sequens exsurgit ex superioribus terminorum *proximorum* diagnosis; patetque.

I. Sub-

I. Subtangentem $t$ semper unius esse dimensionis, ac per fractionem exprimi.

II. Fractionis hujus numeratorem nullos terminos ingredi, in quibus applicata $y$, aut tangens $s$ (quæ tangens unicam dimensionem nunquam transcendit) non reperiatur.

III. Si termini æquationis fuerit *simplices*, nullam interceptam $x$ in numeratore, nullam $s$ aut $y$ neque $z$ in denominatore conspici.

IV. Si *mixtos* continuerit æquatio curvæ, tam $x$ quam $y$, item $z$ & $s$ reperiri posse in utrâque fractionis parte; hac tamen lege, ut, fractione denuo ad æquationem reductâ, quæ nihilo ponatur æqualis, ac omnibus $t$ in $x$, ac $s$ in $z$ mutatis, nullus reperiatur terminus mixtus, qui juxta indeterminatarum suarum, quas continet, numerum repetitus non appareat; numeris præfixis singularum indeterminatarum potestatum exponentes, ipsorumve rationes, perpetuo exprimentibus.

V. Unde sequitur terminorum, in quibus eædem indeterminatæ concurrunt, signa, post peractam per numeros præfixos legitimam divisionem, fore eadem.

94. Ut ergo ad rem propius accedamus, hoc pacto solvitur recensitum modo problema.

I. Mutato $t$ in $x$, ac $s$, si occurrat, in $z$ curvam denotantem, omnes termini in eandem partem rejiciantur; ac curiosè dispiciatur, num *simplices* sint termini, num vero intercurrant *mixti*.

II. Si omnes sint *simplices*, singuli per numerum dimensionum indeterminatarum suarum dividantur & habebitur æquatio curvæ.

III. Si *mixti* adsint, & legem diagnostici IV. & V. præc. §. observent: singuli easdem indeterminatas continentes per respectivum dimensionum numerum, ad quem indeterminatæ evectæ sunt, hac lege dividantur, ut ex singulis idem resultet terminus, qui juxta indeterminatarum suarum numerum repetitus apparebit.

IV. Quorum terminorum hac ratione sæpius occurrentium unico tantum servato, simplicibusque juxta N°. 2. tractatis, emerget quæsita curvæ æquatio.

*Ex. I.* Detur $t = \frac{y^3+fyy+rry}{xx+fx+rr}$, juxta N°. 1. mutato $t$ in $x$, ac rejectis omnibus ad eandem partem erit, $x^3+fxx+rrx-y^3-fyy-rry$; cum autem hic omnes sint simplices, juxta N°.

No. 2. erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}fxx + rrx - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}fyy - rry = 0$, æquatio curvæ desiderata.

*Exemp. II.* Detur $t = \frac{3y^3 + 2ryy - 2xyy - xxy}{3xx + 2yx + yy}$ erit omnibus juxta No. I. peractis $3x^3 + 2yxx + yyx - 3y^3 - 2ryy + 2xyy + xxy$ ubi cum mixti adsint, $2yxx$ & $xxy$, item $yyx$ & $2xyy$ singuli secundum duarum indeterminatarum numerum bis repetiti; si mixtorum indeterminatas continentium alter per dimensiones ipsius $x$, alter per dimensiones ipsius $y$ juxta No. III. dividatur, orientur termini $yxx + yyx$ secundum *N. IV*; *simplicibusque* per suarum indeterminatarum exponentes divisis, nascetur æquatio curvæ requisita $x^3 + yxx + yyx - y^3 - ryy = 0$.

*Exemp. III.* Ne autem æquationes, quæ curvas involvunt, neglexisse videar, sit, positâ $z$ loco curvæ,

$$t = \frac{6ry^3zz + 4ry^3zs + rry^4 - yxxz^3 - 3yxxzzs}{2yxz^3},$$

cui oportet æquationem curvæ congruam exhibere. quare juxta No. I, $t$ in $x$, ac $s$ in $z$ verso, omnibusque terminis ad eandem partem retractis erit

$$2yz^3xx + yz^3xx + 3yz^3xx - 6ry^3zz - 4ry^3zz - rry^4$$

ubi terminus $yz^3xx$ tres continens indeterminatas ter, ac $ry^3zz$ duas habens indeterminatas,

 bis

bis repetitur, solò $rry^4$ existente *simplici*, cumque etiam pateat terminos *mixtos* per indeterminatarum respectivum dimensionum numerum divisos eundem quotientem relinquere, fractionem ipsam $t$ exprimentem in terminis æquationis *proximis* datam esse jam certi sumus, juxta §. 93. enumerata criteria: adeoque *simplici* ex more tractato, & mixtorum iisdem indeterminatis constantium unico retento, exoritur æquatio curvæ $yz^3xx - 2ry^3zz - \frac{1}{4}rry^4 = 0$ aut additâ qualibet determinatâ quantitate, $yz^3xx - 2ry^3zz - \frac{1}{4}rry^4 + p^6 = 0$.

NB. Determinatam quantitatem semper inventæ æquationi addi posse, ex tangentium methodo directâ patet, cum in subtangenti inquirendâ continuo excidat; quin & aliquando necessarium videtur.

*Exemp. IV.* Detur $t = \frac{-xy}{2x+y}$ erit $2xx + xy + xy$ adeoque $xx + xy = 0$, æquatio quæsita, seu additâ determinatâ $xx + xy = pp$, cum primo inventa æquatio, non nisi falsam radicem admittat.

95. Notetur, quod in sequentibus usum aliquem præstiturum est, ex methodo modo traditâ sequi, quo pacto, *Fig. XXII.* ex dati *intervalli* cujusvis *QR* (quam lineam & *subnormalem* in seqq. vocabo) valore analytico curvæ *ADE* æquatio conveniens indagari possit, positâ enim $QR = l$, est perpetuo subtangens seu $t = \frac{yy}{l}$, uti notum; quæ subtangentis expressio ad terminos proximas reducta, juxta §. 94. requisitam æquationem prodet.

*Schol.* Præcedentium demonstratio ex §. 14, 17, 35. non difficulter colligetur; cum, quæ ibibi circa methodum tangentium directam præcipiantur, hic ordine retrogrado sint tradita: ac solus jam terminos *remotos* subtangentis valorem exprimentes ad *proximos* reducendi modus hac in parte desiderari videtur, quod effectum dabitur, si cognita sit methodus æquationem datam in duo loca, vel duas potius æquationes, resolvendi, quæ datam inter se legem & conditionem observant, talem scilicet, qualis inter æquationem curvæ, eamque, quæ subtangentis valorem exprimit, ex supra traditis requiritur. Quod, quam variis modis tentari queat, æquationum constructiones palam faciunt; hoc enim casu æquationem datam quamcunque in infiniti generis loca dirimi, in eaque quotlibet feræ quantitates, ex assumtæ hypotheseos instituto, seu æquationum, tum ipsius curvæ naturam, tum ejus subtangentem exprimentium relatione mutua, determinationem patientes invehi posse, post editum Celeberr: *Slusii Mesolabum*: nemo ignorat.

Cumque jam termini subtangentium proximi ex methodis §. 14, 17, 35, oriundi ex facili dignoscantur; ubi nimirum curvarum æquationes per unius pluriumve, cur-

varum interceptas applicatasque, quin & ipsas respectivas curvas exprimuntur; restaret hanc regulam extendendi modus ad ejusmodi curvas, quarum indeterminatæ inter potestatum exponentes reperiuntur, uti §. 47. & seqq: tum & ad alias, quarum æquationes non, nisi mediantibus infinitesimis, exprimi valent; quas inter sequentia magis commode tractabimus: licet utrumque hoc non tantum sed & omnia curvarum genera ad methodum §. 35 expositam referri valeant. Hanc autem subtangentium subnormaliumque varietatem exactius discutere, ac ad unum pluresve, omnibus tamen inversæ methodi casibus sufficientes, canones reducere, nostri nunc est nec instituti, nec otii: non enim huc spectantes methodos omnes, quæ animo adhucdum obversantur, explorare permisit temporis augustia. Interim, ne curiosioribus inquirendi occasionem præscindam, paucula quædam tentamina subjicio; insimulque quomodo ex singulis immensum exemplorum ac theorematum agmen, citra ullam calculi molestiam, educi queat, exhibito levi specimine ostendam.

96. Quem in finem, quamcunque terminorum summam tum determinatorum, tum *simplicium x* continentium, quibuslibet signis affectorum, ut $x^3 - bxx$ &c. $+ r^3$ voco $z$; ac per eandem $z$, aut solam, aut in quotlibet $x$ ductam, ut $zx$, $zxx$ &c. si per majusculam quamlibet vocalem $A$ multiplicetur, ut $(Az)$ $(Azx)$ &c. denoto omnem ipsius $z$ terminorum seriem, cum singuli termini per dimensionum ipsius $x$ numerum sunt multiplicati: sic $(Az) = 3x^3 + 2bxx$ &c. & $(Azx) = 4x^4 + 3bx^3$ &c. Ubi vero $z$

vel

vel $zx$ &c. per eandem *A* dividitur, ut $\left(\frac{z}{A}\right)$ $\left(\frac{zx}{A}\right)$ &c. designatur eadem terminorum ipsius $z$ series, cum singuli termini per respectivum dimensionum ipsius $x$ numerum sunt divisi, sic $\left(\frac{z}{\;}\right) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}bxx$ &c. & $\left(\frac{zx}{A}\right) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}bx^3$ &c.

Sic & summa terminorum *simplicium* $y$ continentium vocata $f$, si per majusculam quandam consonantem Verb: Gr: *B* multiplicetur, designo per $(Bf)$ aut $(Bfy)$ hanc summam similiter multiplicatam; sin vero per *B* dividatur, erit $\left(\frac{f}{B}\right)$ aut $\left(\frac{fy}{B}\right)$ summa eadem similiter divisa.

NB. Has quantitates parenthesi includo, cum non nisi junctim in æquationis divisione aut multiplicatione &c. adhiberi possint, uti ex earum naturâ cognitâ satis innotescit.

Tandem quantitates determinatas, dimensionibus æquandis quandoque inservientes, appello $m$, subnormalem: $l$, ac subtangentem: $t$, dico.

97. Sit $\frac{z}{f} = l = \frac{yy}{t}$, erit $zt = fyy$; unde æquatio juxta §. 94, Ex. I. huic subtangenti conveniens est $\left(\frac{zx}{A}\right) = \left(\frac{fyy}{B}.\right)$

*Corol. I.* Jam facto $f = m$, erit $l = \frac{z}{m}$, & $B = 2$; unde æquatio $\left(\frac{zx}{A}\right) = \frac{myy}{2}$, patetque subnormalium valores per fractionem $\frac{z}{m}$ expressos omnes esse ad terminos *proximos*, adeoque & ad curvam congruam reducibiles.

*Coroll. II:* Quod si fiat $f = y^p$, erit $l = \frac{z}{y^p}$ & juxta §. 94. *Exemp. I.* reducibilis ad hanc æquationem $p+2 \left(\frac{zx}{A}\right) = y^{p+2}$; cujus ope $l$ reducta ad $x$ fiet $= z$ divisæ per $\sqrt{p+2, \left(\frac{zx}{A}\right)}^{\frac{p}{p+2}}$, & facta $\frac{p}{p+2} = \frac{q}{k}$ fiet $p+2 = \frac{2k}{k-q}$; rursumque posita $q = 1$, erit $p+2 = \frac{2k}{k-1}$, hoc vocetur $h$, erit $l = z$ divisæ per $\sqrt[\frac{1}{k}]{h\left(\frac{zx}{A}\right)}$ & æquatio curvæ respondentis $= h\left(\frac{zx}{A}\right) = y^h$.

Cum autem $z$ hic per quantitatem irrationalem sit divisa, notum est, si potestas signi radicalis $\frac{1}{k}$ fiat negativa, ipsam $z$ per eandem quantitatem multiplicatum iri: quo in casu erit $h = \frac{2k}{k+1}$, & æquatio $h\left(\frac{zx}{A}\right) = y^h$, mutato juxta

ta statim insinuata ipsius $b$ valore.

*Coroll. III.* Unde solvitur hoc problema 1. data quantitate irrationali ex terminis, tum determinatis, tum simplicibus $x$ continentibus, quolibet radicali communi signo copulatis constanti, duas alias quantitates $z$ invenire; ut, si harum altera per dictum irrationalem dividatur, altera vero per eandem multiplicetur, in utroque casu emergat subnormalis ad terminos proximos, adeoque ad curvam convenientem, reducibilis; ipsiusque curvæ æquationem determinare.

Sit $\sqrt[k]{xx+rx+rr}$ exposita quantitas irrationalis; multiplicentur termini ipsam componentes per dimensiones respectivas ipsius $x$ (unde terminus determinatus excidet, cum $x$ in eo dimensiones habeat nullas) & fiet $2xx+rx$; tum singuli per $x$ in duplum exponentis signi radicalis ductam dividantur, & emergit quotiens $\frac{2x+r}{2k}$;

Qui si multiplicetur per exponentis ejusdem ac unitatis differentiam emerget $z = k-1$ in $\frac{2x+r}{2k}$, quod primo casui inservit, cum $z$ dividitur per quantitatem expositam irrationalem.

Si vero idem quotiens per exponentis dicti ac unitatis summam multiplicetur, orietur $z = \frac{k+r}{} \text{ in } \frac{2x+r}{2k}$, quod in secundo casu requiritur, ubi z multiplicatur.

Demonstrationem ex præmissis quilibet eruet, eamque proinde cum cæteris hinc deducendis (si z & f, ad terminos quosvis mixtos extendantur, ipsique signorum exponentes q & k, quam pati possint, varietatem admittant) brevitatis ergo prætereo, æquatio curvæ mox insinuata est.

98. Reassumatur *Fig. X I.* servatisque §. 36. symbolis, ac §. 37. hypothesi $fz = yy$, invenitur æquatio subtangentialis $nt + kt = 2tn$, unde $l = \frac{yy}{t} = \frac{fz}{t} = \frac{nfz + kfz}{2kn} = \frac{fz}{2k} + \frac{fz}{2n} = \frac{yy}{2k} + \frac{yy}{2n}$.

*Coroll. I.* Unde sequitur, duabus curvis ad eundem axem descriptis, si correspondentium applicatarum rectangulum $fz$ per utriusque curvæ subtangentem, n & k successivè dividatur, erit quotientum summæ semissis æqualis subnormali l, ad tertiam quandam curvam pertinenti, cujus ordinatæ quadratum $yy$ æquivalet $fz$ seu exposito applicatarum in reliquis curvis rectangulo; $l = \frac{fz}{2k} + \frac{fz}{2n}$.

*Coroll. I I.* Hinc etiam patet problema Cor: §. præcedent: infinitis modis solvendi methodus; positâ enim z æquali cuidam quantitati irrationali,

nali, sive uno sive pluribus vinculis radicalibus ligato, erit $\frac{nf+kf}{2kn}$ ipsam multiplicans quantitas; quæ, cum $f$ sit arbitraria, infinitis modis variari potest.

*Schol.* Quoniam vero curvæ non tantum tres, uti modo, sed pro arbitrio multæ assumi, interque singulas infiniti generis relationes statui possint, quin & ipsæ curvæ iis admisceri; quantus se pandat reducibilium subnormalium tangentiumque campus, quarum curvæ absque ulla calculi molestia statim se produnt, nemo non videt, sufficerit hic digitum intendisse. Quin & vario, præter modo tradita, principiorum genere oriundas methodos, subnormales ad curvas congruas reducendi his adjungere in proclivi esset, nisi peculiarem sibi tractatum potius deposceret materiæ dignitas: quare è multis unicam, ex infinitesimarum calculo originem trahentem annecto, & hoc ex anterioribus demonstrabile præmitto lemmaticum.

99. Sit indeterminata $x$, crescens aut decrescens per infinitesimam $e$; $y$ per $a$; $h$ per $i$, &c. erit exposita quæcunque æquatio ad infinitesimas redacta (in quâ indeterminatæ singulæ in proprias sibi infinitesimas, determinatasque ductæ sint) sequenti modo ad æquationem ordinariam reducibilis: si, nimirum, mutatâ infinitesimâ in propriam sibi indeterminatam, emergens terminus dividatur perpetuo per exponentem dimensionum indeterminatæ

Exemp: Gr. detur, $rhi + hhi + \frac{6h^3 i}{r} = yya + rya$, erit hæc reducibilis ad hanc æquationem $\frac{1}{2}rhh + \frac{1}{3}h^3 + \frac{3}{2}\frac{h^4}{r} = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}ryy$, & sic in cæteris.

100. Jam

100. Jam cum juxta §. 23. in omnibus curvis fit $ya = le$, fiat $l = \frac{bz}{k}$; positis $b, k, z$, pro quantitatibus vel ex arbitrio, vel ex progressu calculi determinandis; erit $\frac{bze}{k} = ya$ adeoque $e = \frac{kya}{bz}$; tum assumtâ $b$ pro quotlibet terminis simplicibus $x$ continentibus, signoque radicali cujuslibet potestatis $q$ copulatis, qui ab asymmetriâ liberati litterâ $g$ designentur, erit $b = g^{\frac{1}{q}}$, & $b^q = g$; quæ æquatio ad infinitesimas redacta juxta methodos superiores, erit $qb^{q-1}i = \frac{(Ag)e}{x}$ & ponendo $e = \frac{kya}{bz}$ fiet tandem, $qb^q zxi = (Ag)kya$. quæ ultima vocetur *æquatio reducenda*; cujus reductio possibilis existit, si in alterâ parte exceptis determinatis, nulla indeterminata nisi $b$, in alterâ vero nulla nisi $y$ reperiretur, juxta præcedentem; quot autem modis hoc effici possit sequentia consectaria manifestabunt. Quotlibet determinatæ denotentur per $m$, & singulæ per $r$.

*Coroll.* I. Sit $b^q = mx + m$, unde $(Ag) = mx$; & $k = r$, erit æquatio reducenda $qb^q zi = mrya$; quæ reducibilis est, si $z$ per quotlibet terminos, vel $b$ continentes, vel determinatos, exprimatur. II. Si $z$ quotlibet terminos simplices $x$ continentes, communi vinculo

lo non adstrictos comprehendat; siquidem, cum ex hypothesi fuerit $h^q = mx + m$, sit $x = \frac{h^q - m}{m}$ qui valor in omnibus ipsam $x$ componentibus terminis repositus efficiet terminum $qh^q z i$, qualem primo loco desideravimus.

Unde patet si fuerit $\overline{l = x^p + r x^n}$ &c. in $\overline{\sqrt{rx + rr}}^{\frac{1}{q}}$ hoc est, si subnormalis valor exprimatur per quodlibet signum radicale (sub quo $x$ ad plures unicâ dimensiones non assurgit) in quotlibet numero terminos simplices $x$ continentes multiplicatum; erit ad curvam, ex præcedenti, reducibilis; cujus æquatio levi negotio se pandet.

*Coroll. II.* Si vero fiat $h = \sqrt{Cx^3 + rxx}$, erit $q = 3$ & $(Ag) = 3x^3 + 2rxx$; positoque $(Ag) = zx$ erit $\overline{3xx + 2rx = z}$; unde factâ $k$ determinatâ erit $kl = 3xx + 2rx$ $\overline{\sqrt{Cx^3 + rxx}}^{\frac{1}{3}}$ & æquatio reducenda $qh^q i = mya$, seu $3h^3 i = mya$: quæ reducta dabit æquationem curvæ $\frac{3}{4}h^4 = \frac{1}{2}myy$, ex æquatione reducendâ, juxta §. 99, resultantem.

Hinc sequitur, posito $(Ag) = zx$ seu $\left(\frac{Ag}{x}\right) = z$; si $h$ sit æqualis cuilibet quantitati irrationali $x$ continenti; ac $z$ eam multiplicans sit æqualis summæ terminorum sub signo radicali copulatorum.

rum in exponentes ipsarum $x$ respective ductorum, ac unicâ $x$ per divisionem multatorum: $l$ seu $\frac{bz}{m}$ semper fore reducibilem ad curvam, cujus æquatio $\frac{q}{q+1} h^{q+1} = \frac{1}{2} myy$.

*Coroll. III.* Quod siquis alterius generis porismata desiderot, multiplicet æquationem reducendam $qh^q zxi = (Ag) kya$ utrinque per $y^f h^b$, emerget: $qh^{q+b} y^f zxi = (Ag) k h^b y^{f+1} a$. Quæ, facto $qy^f zx = (Ag) h^b$, relinquet $h^{q+b} i = my^{f+1} a$; unde æquatio curvæ, omnibus his casibus congruens $\frac{1}{q+b+1} h^{q+b+1} = \frac{1}{f+2} my^{f+2}$. Ex:Gr: $h = \sqrt{xx+rr}$, fiat $f = 0$ & $b = 2$; erit $q = 2$, unde $(Ag) = 2xx$, & $2zx = xxhh$; quare $z = x^3 + rrx$, ac $kl$ seu $ml = zh = x^3 + rrx\sqrt{xx+rr}$, & æquatio curvæ correspondentis $\frac{1}{5} h^5 = \frac{1}{2} myy$.

*Schol.* Cum autem hic ex data $h$ semper ipsa $z$ determinetur; quod primario requiritur tamen, hoc est, ut, datis tum $h$ tum etiam $z$, inveniatur æquatio curvæ, cujus subnormalis analyticè effertur per $\frac{hz}{k}$; hoc est, ut dato quolibet intervalli valore curva ipsi conveniens reperiatur, unde problema hocce generaliter ex parte solutum est. Quem in finem, cum exponentes $b$ & $f$ adhuc aptæ sint determinationem recipere, poterit earum ope curvæ æquatio indagari, quæ aliquando erit geometrica, aliquando ex earum genere, quas tractavimus §.47. & seqq:; aliquando alius generis. Accedit, quod, si termini mixti considerentur, cum

cum hactenus non nisi simplices adhibuerimus, tum si in æquationem reducendam aliæ ex calculo postea determinandæ quantitates ingerantur, variis modis intentum possimus assequi; insimulque experiri, quam curvæ speciem æquatio requisita exprimat. Hæc autem ob caussas supra memoratas in aliam occasionem reservamus, iis interim suis in rem Mathematicam merita gratulaturi, quibus hæc ad finem perducendi vel otium vel facultas suppetit.

101. Sit F. XXIV. curva *I L O* ad axem *KP* ope applicatarum *TL*, *BI*, pertinens, eamque tangat in *L* recta *NLI*; oportet describere aliam curvam *ADE*, ejus naturæ, ut, si ducatur eam tangens *TD*, sit semper *QT* ad applicatam *QD*, ut *KT*, ad *TL*. In quem finem ductâ *KM* parallela *TL*, jungatur *LS* parallela *KT*; sumtâque *TB* infinitesimâ, compleatur parallelogrammum *BIMK*; hinc productis *ST* & *MB* versus *D* & *E*, donec se mutuo secent in *E*; sumatur *DE* infinitesima, ac demittantur normales *DQ*, *EP*, erunt *D* & *E* puncta in curva *ADE* quæsita, quam tangit *DT*. Vocentur jam *KT*: $x$. *TL*: $f$. *ST*: $g$. *NT*: $h$. *TQ*: $t$. *QD*: $y$. *TD*: $s$; infinitesimæ, *TB*: $i$. *CB*: $\theta$. *TC*: $\lambda$. *GL*: $\pi$. *SR*: $\mu$: *MR*: $\nu$. *DE*: $u$. *DH*: *QP*: $e$. erit ergo *SR* : *SE* :: *CB* : *CE*. seu $\mu : g + s + u :: \theta : s - \lambda + u$, unde rejectis per Lem. 10. rejiciendis, $\theta = \frac{s\mu}{g+s} = \frac{yi}{s}$ (nam *TB*, $i$ : *CB*, $\theta$ :: *TD*, $s$ : *DQ*, $y$.) adeoque $\mu = \frac{gyi+syi}{ss}$.

Rursus quoniam *MB*, $g+\nu+\lambda$ : *KB*, $x+i$ :: *SM*, $\pi$ : *SR*, $\mu$. erit juxta Lemm. 10,

$\pi = \frac{g\mu}{x} = \frac{yi}{b}$ (nam $NT : TL :: LG : GI$. seu $b : f ::$ $i : \pi$.) unde $\mu = \frac{fxi}{gb} = \frac{gyi + syi}{ss}$ seu $ssfx = ggyb + gbsy$; in quâ æquatione positis, $tg$ loco $sx$, & postea $yx$ loco $ft$, (cum sit $g : x :: s : t$, & $f : y : x :: t$.) emerget $sx = gb + bx$, unde tandem $s = \frac{gb}{x - b}$; quare, datis $x$, $b$, & $g$ magnitudine & positione, datur in producta $ST$ seu $g$, linea $TD$ seu $s$, & punctum $D$ in curvâ $ADE$ quæsitâ: unde sequens oritur analogismus $x - b : b :: g : s$. & propter triangulorum $SKT$ & $DQT$ similitudinem $x - b : b :: g : s ::$ $f : y :: x : t$.

Exempla non addo; cum $KT + QT$ seu $t + x$ aut $KQ$ vocatâ $u$, æquatio inter $u$ & $y$ ex facili inveniatur, tum si curvæ, *Fig.* XXV. ab eâdem axis parte sint positæ, erit $s$ hoc in casu $= \frac{gb}{b - x}$ & $QT - KT = u = t - x$; uti schema inspicienti satis apparet: omnes enim hujus problematis casus percurrere, majoris foret operæ, quam utilitatis.

C. A.

# CAPUT II.

## *De Planorum Curvilineorum dimensionibus.*

1. EX lemm. 26 & 27, curva *ABCDEF* *Fig. XXVI.* rectulis constat, angulos in *B*, *C*, *D*, *E*, &c. facientibus; unde spatium *AFO* (cujus angulum *AOF* hic rectum supponimus) polygonum est; quod polygonum si lineis ipsi *FO* parallelis *EP*, *DQ*, *CR* &c. partesque axis infinitesimas æquales aut inæquales *PQ*, *QR*, *RS* &c. intercipientibus, dividatur trapezia *DQPE*, *CRDQ* & similia; erit omnium trapeziorum summa ex Geometriæ legibus æquale spatio infinitè polygono seu curvilineo *ABCDEFOA*.

2. Idem constat; si planum in trapezia *EGID* ope linearum ipsi *AO* æquidistantium dividatur. Quibus principiis omnis fere curvilineorum mensura hactenus nota absolvitur.

3. Ad inveniendum ergo trapezii *DQPE* valorem, sit *DQ*: $y$. *DH* seu *QP*: $e$ infinitesima, ut & *EH*: $a$; quare *EP*: $y+a$, unde trapezium *DQPE* æquatur facto ex *DQ*+*PE* in ½ *QP*, seu $\frac{2ye+ae}{2}$; & deleto (juxta lemm. 10.) infinitesimarum rectangulo $ae$, erit tra-

pezium $DQPE = ye =$ rectangulum $DQPH$.

4. Hinc, posita $y$ ad locum curvæ cujuslibet, erunt omnia $ye$ æqualia spatio curvilineo quæsito: Unde directè hoc theorema: si axis figuræ $AO$ dividatur in partes infininitesimas æquales aut inæquales $AS$, $SR$ &c. & ad singula divisionum puncta eleventur applicatæ $SB$, $RC$, $QD$: quarum singulæ parte infinitesimâ $DM$, $CN$, &c. proximam excedunt; erunt omnia rectangula ex singulis applicatis in singulas infinitesimas simul sumta; seu omnia $ye$, æqualia curvilineo $AOFA$.

5. Si vero fuisset $EP:y$, unde $DQ:y-e$, cæteris ut supra, foret idem trapezium $DQPE$ æquale rectangulo $ZQPE$, æquale rectangulo $ZQPE$ seu $ye$, juxta modo tradita. Quæ & in figuris versus axem $AO$ convexis obtinent.

6. Quin & hinc sequitur; *Fig.* XXVII. si fuerint duo spatia $AOF$, $AOL$, in eâdem altitudine $AO$ posita, factisque applicatis, $QD:y$, $QR:z$, & in utrâque $QP$ infinitesimâ semper æquali: $e$; primum spatium æquari omn. $ye$, & secundum omn. $ze$: quare primum ad secundum, ut omn. $ye$ ad omn. $ze$; & (divisis rectangulis per æqualem altitudinem $e$) ut omnia $y$ ad omnia $z$; hoc est ut summa applicatarum in primâ ad summam applicatarum in secundâ figurâ.

7. Huic,

7. Hinc, si $y$ ad $z$, constantem in singulis rationem habeat, ut $r$ ad $s$; erit quoque, juxta lemm. 43; ut $r$ ad $s$ ita omn: $y$ ad omn: $z$.

8. Quibus adde; si ad hæc duo spatia assumatur tertium, cujus applicata $QH: h$; & fiat perpetuo $r : s :: y : z \mp h$; erit quoque $r : s ::$ omn. $y$: omn. $z \mp h$; hoc est ut $r$ ad $s$, ita figura prima ad summam vel differentiam secundæ & tertiæ: idque tam in integris *AOF*, *AOL*, *AOM*, quam partibus *AQD*, *AQR*, *AQH*; modo eadem servetur altitudo, & infinitesimarum constans æqualitas.

9. Ac idem evenire patet; quotcunque figurarum applicatæ quibuslibet signis copulatæ assumantur; modo, quæ mox insinuavimus, rite observentur.

10. Sit jam *Fig. XXVIII.* curva *QADEF*; non ad axem, sed ad punctum Q relata. Assumta *DH*, infinitesima, ductisque QD, QE, jungatur *DH*, ut QD sit æqualis HQ; dicatur QD: $y$, infinitesima *DH*, $e$, *HE*, $a$; & triangulum QDE æquabitur facto ex QE in $\frac{1}{2}$ *DH*; seu $\frac{ye + ae}{2}$ juxta lemm. 33; & juxta lemm. 10. $= \frac{ye}{2}$ adeoque totum spatium *QAF*; quod æquatur omnibus triangulis QDE, QEF &c. æquale erit omnibus $\frac{ye}{2}$, seu

seu omnibus triangulis $QDH$; unde similia, ac supra, deduci possent.

11. Sit *Fig.* XXIX. figura $AFO$ eadem quæ §. 1; symbola, quæ in §. 3; tangat $TD$ curvam in $D$, voceturque $TQ: t$; erit propter triangulorum $TQD$, $DHE$ similitudinem, $TQ, t: QD, y:: DH, e: EH, a$. unde $ye = ta$: quare ob parallelas $EG$, $DI$, existente $GI = a$, si linea $TQ$, in $IM$, normalis ipsi $FI$, statuatur; erit rectangulum $GIMX = ta$: idque si fiat toties, donec per puncta $MLK$, describi possit curva $KLMNO$; constabit spatium $KFO$ totidem $ta$, quot rectangulis $ye$ figura $AFO$ constat: quare, quia semper $ye = ta$, erunt omnia $ye =$ totidem $ta$, hoc est spatium $AFO$ æquale spatio $OFK$.

*Caroll.* 1. Sit $AFO$ paraboliformis; & $AQ$ vocatâ $x$, ejus æquatio $r^{p-q}x^q = y^p$; erit, juxta §. 19, Cap. I, $TQ$ seu $t = \frac{px}{q}$; unde spatium $FOK =$ omn. $\frac{pxa}{q}$; jam vero quia $RD = AQ = x$, & $BR = a$, erit trilineum $SAF$ æquale omnib: $BRDE$ seu omn. $xa$, ex §. 4, sunt autem omn: $\frac{pxa}{q}$ ad omnia $xa$ ut $p$ ad $q$; sed omnia $\frac{pxa}{q} =$ omn: $ye$; ergo omn. $ye$ seu data parabola $AOF$, ad complementum $SAF$ seu omn. $xa$, ut $p$ ad $q$: hoc est parabola $AFO$ ad rectan-

ctangulum circumscript. *SAFO*, ut $p$ ad $p+q$; seu ut exponens potestatis applicatarum, ad exponentium applicatarum & partium axis summam.

*Coroll. II.* Sit *Fig. XXX.* hyperboloides quodlibet *CEDV*, ad asymtotos *KA*, *AO* relatum, cujus æquatio, retentis symbolis superioribus $y^p x^q = s^p r^q$; erit ob tangentem *DT* linea $QT \frac{px}{q}$: jam vero, cum sit $ye = ta$, erit posito perpetim *QT* seu $t$ in *IM*, rectangulum *DQPH* seu $ye$, semper æquale *MIGL* rectangulo seu $ta$; adeoque, si id fiat continuo, erit figura *KAOBC* versus *KC* interminata, seu omnia $ye$, æqualis figuræ *KNSH*, seu omn. $ta =$ omn. $\frac{pxa}{q}$. atqui (vocatis brevitatis causâ figurâ *KAOBC*: $f$, & rectangulo inscripto *NBOA*: $h$,) erit figura *KNBC*: $f-h =$ omn. $xa$, (cum *ID* sit $= x$, & $GI = a$) unde omnia $\frac{pxa}{q}$ seu omnia $ye$ seu $f$, ad omnia $xa$ seu $f-h$ ut $p$ ad $q$; & $p:p-q::f:h$; hoc est figura *KAOBC* ad rectangulum inscriptum *NAOB*, ut exponens potestatis applicatarum $p$, ad differentiam exponentium applicatarum & partium axis $p-q$. unde sequitur, positâ $q$ minori quam $p$, curvam versus *K* interminatam esse mensurabilem; si $p = q$, infinitam: si $q$ major quam $p$, plusquam infinitam: item hyperbolöidea omn. (solâ Apollonianâ exceptâ) ab unâ par-

parte *K* terminabiles, ab altera *V* plusquam interminabiles existere; cum, quæ illic fuit ratio $p$ ad $p-q$, hic sit $q$ ad $q-p$, quare constat. sed hæc in tyronum gratiam.

*Coroll. III.* In transitu noto (si solam è cono sectam hyperbolen reliquam facias) *Fig. XXXI.* omnia spatia *CBDE*, *EFGH*, inter asymptoton & hyperboliformem quamlibet constituta, ac utrinque applicatis *CB*, *DE*, seu *EF*, *GH*, ad eandem asymtoton terminata, mensuram admittere; quod coroll: præcedentis non difficile consectarium est. Unde rursum infinita curvarum genera quadrantur; factis enim *HG*: $y$, *AG*: $x$, *EF*: $s$, *AF*: $r$; sit huic curvæ conveniens æquatio $y^p x^q = s^p r^q$; jam autem productâ *AE* seu $b$ versus *N*, huic ad perpendiculum excitetur recta *NH*; & vocatis *AN*: $z$, *HN*: $f$, si ad has ipsas æquatio ab asymtotis reducatur, prodibit $\overline{sz - rf}^p$ in $\overline{rz + sf}^q$ $= b^{p+q} s^p r^q$, quæ facto $r = s$ fiet $\overline{z - f}^p$ in $\overline{z + f}^q = b^{p+q}$.

Trilineum jam *NEH* esse quadrabile nemo non videt, cum juxta mox proposita quadrilineum *EFGH* mensuram patiatur, modo $p$ & $q$ diversæ sint magnitudinis.

*Coroll. IV.* Abundè quidem hinc innotescit, *Fig. XXXII.* & *XXXIII.* datâ cujusvis generis

pa-

parabolâ, ejusve trilineo, aut hyperbolâ, & existente applicatâ $QD:y$, interceptâ $QA:x$; tum $QR = OF:b$, axe $AO:c$, fore omnia $QR$ seu $b$ ad totidem seu omnia $QD$ seu $y$, ut $p \mp q$ ad $p$. Si vero quæratur, quam habeant rationem omnia $b$ ad quamlibet potestatem $k$ evectæ, ad totidem $y$ in eâdem potestate constituta, seu omnia $b^k$ ad omnia $y^k$, sequenti modo investigari potest; ac primo, in *F.* XXXII. seu paraboloïdibus: propter æquationem $r^{p-q} x^q = y^p$, est $y^k = r^{\frac{pk-qk}{p}} x^{\frac{qk}{p}}$; fiat jam $y^k = r^{k-1} z$, erit valore hoc in locum ipsius $y^k$ reposito, ac divisione legitimè peractâ $r^{p-q} x^{qk} = z^p$, quæ æquatio denuo est ad parabolam; sit ea $AGO$, ubi manente $AQ:x$, & $AO:c$, sit $QP:z$; & $OG:d$; jam vero ex Coroll. I, ut $p+qk$ ad $p$, ita omnia $GO$ seu $d$ ad omn: $PQ$ seu $z$; hoc est ita omnia $b^k$ ad omnia $y^k$. cum enim mox fuerit suppositum $y^k = r^{k-1} z$, erit eandem ob causam $b^k = r^{k-1} d$. unde constat ratiocinium.

Idem si fiat in hyperboloïde $LAOFDL$, *Fig.* XXXIII. cujus hic æquatio, retentis symbolis $y^p x^q = b^p c$, fiatque $y^k = b^{k-1} z$ invenietur ratio omnium $y^k$ ad omnia $b^k$, ut $p$ ad $p - qk$. Posset &, reducendo hyperboliformem hanc æquationem ad paraboliformem, idem

unicâ operâ obtineri; cum enim, juxta hanc reductionem, fiat $y^p = b^p c^q x^{-q}$, erit interceptæ exponens hic negativus, adeoque quæsita ratio juxta parabolæ leges ut $p$ ad $p - qk$; & sequitur utilissimus hicce canon utrique casui congruens: In indagandâ ratione omnium $y^k$ ad omnia $b^k$, in hyperbolöide pariter ac paraboliformi, primò, si opus sit, æquatio eò reducatur, ut $x$ & $y$ ab oppositis æquationis partibus conspiciantur, hoc est, ut paraboliformem repræsentet; eritque, ut dignitatis applicatarum, ac dignitatis interceptarum per quæsitam potestatem multiplicatæ summa: $p \mp qk$; ad dignitatem applicatarum $p$, ita omnia $b$ ad omnia $y^k$.

Esse autem interceptæ in parabolöide potestatem $= q$ in hyperbolöide $= -q$ post reductionem satis apparet. Notetur ipsum $k$ ad quosvis, tum fractos, tum negativos, exponentes extendi posse. Exempla his casibus inservientia transilio.

*Coroll. V.* Deducitur hinc celebratissima *Cl. Wallisii Arith: Infinit.* prop. LXIV, cum sit $p$ ad $p \mp qk$, ut unitas ad unitatem $\mp \frac{qk}{p}$; si enim curvarum æquationes ad quæsita $y^k$ reducantur, emerget pro parabolâ seu serie directâ $y^k = r^{\frac{pk - qk}{p}} x^{\frac{qk}{p}}$; pro hyperbola verò seu serie inversâ $y^k = b^{\frac{pk}{p}} c^{\frac{qk}{p}} x^{-\frac{qk}{p}}$; quare, si potestas

testas ipsi $x$ seu interceptæ adhærens sumatur pro seriëi indice, erunt, juxta modo inventa omnia $y^k$ ad omnia $b^k$ ut unitas ad interceptæ potestatem (cum ipsam $y$ in requisitis dimensionibus constitutam repræsentat) seu seriëi indicem unitate auctum.

*Coroll. VI.* Et hactenus quidem cognita ratio omnium $y^k$ seu (ducendo *Fig. XXXII.* utrumque in infinitesimam $QN: e$) omnium $y^k e$ ad omnia $b^k e$; ut vero valor eorum absolutus alio modo inveniatur, erat, ex modo prægresso Coroll. IV, ut $p \mp qk$ ad $p$, ita omnia $ze$ ad omnia $de$, hoc est ita paraboloides $AGO$, ad rectangulum $A\overline{O}GK$ seu $dc$, quare $\frac{pdc}{p+qk}$ = omnia $ze$ = omnia $\frac{y^k}{r^{k-1}}e$; sed ex eadem Coroll. IV, est $b^k = r^{k-1}d$; unde valore per hanc æquationem invento ipsi $d$ suffecto, emerget omnium $y^k e$ valor absolutus $= \frac{pcb^k}{p+qk} = \frac{1cb^k}{1+\frac{qk}{p}}$.

*Coroll. VII.* Quod si (facto indice $\frac{qk}{p} = n$) in invento valore omnium $y^k e = \frac{1cb^k}{1 \mp n}$, loco $b^k$, surrogetur æquivalens quantitas per

curvæ utriusque æquationem reperta; hoc est, in parabola $r k^{-n} e n$; in hyperbola $b k e n e^{-n}$; exprimentur omnia $y k e$ in parabolâ per $\frac{c^{1+n}}{1+n}$ in $r k^{-n}$; ast in hyperbolâ per $\frac{c^{1-n}}{1-n}$ in $b k e^{n}$.

Unde videtur nasci lemma a *Clar: Mercatore* prop. XVI. Logarithmotechn: suæ demonstratum: cuique soli exercitationem suam superstruxit ingeniosiss: *D: Gregorius*. cum enim sint omnia $y k e$ = omni $r k^{-n} x^{n} e$ in parabolâ, & in hyperbolâ $b k e n x^{-n} e$; manifestum est (rejectis utrinque quantitatibus determinatis, utpote nullam mutationem inferentibus) fore perpetuo omnia $x^{\mp n} e = \frac{c^{1 \mp n}}{1 \mp n}$; facta scilicet maximâ $x = c$. ex quo sequitur hoc generale.

*Coroll. VIII.* Si linea recta, $AO:c$, in partes innumerabiles seu infinitesimas $e$ dividatur; erit summa quarumvis dignitatum ab innumeris rectis, $QA:x$, ab extremitate $A$ propositæ rectæ continuò incipientibus genitarum (quarumque singulæ in infinitesimam propriam $QN:e$, ipsarum terminos respectivos claudentem multiplicatæ sunt) seu omnium $x^{\mp n} e$, æqualia rectæ expositæ, $AO:c$; seu maximæ $x$ potestati assumtis potestatibus ipsarum $x$ proxime superiori, ac divisæ per suum exponentem $= \frac{c^{1 \mp n}}{1 \mp n}$ ratio

ex

ex mox inventis apparet. NB: Quare hic, à laudat: Authoribus prætermissam, parenthesi inclusam conditionem addiderim, demonstrationis series ostendit, conferatur utraque.

Fusius paullo hæc prosequi operæ duxi pretium; ut quomodo summa omnium $yke$, tum per Applicatam $OF:b$, seu figuræ basin, uti *Coroll. V*; tum per interceptam $AO:c$, seu figuræ axem aut altitudinem exprimenda veniat, tyrones addiscant.

Possent & alia hinc erui, ac ex valore $\frac{1cbk}{1+n}$ ope æquationis curvæ respectivæ ipsa $c$ tolli, unde aliûs denuo generis canon enascetur.

12. Quod si præcedentis *Coroll*: effatum modo ad rem præsentem magis accommodato efferatur, sic sonabit: Sint quotlibet legem quamcunque servantes indeterminatæ quantitates $x$, $y$, $f$, $z$, &c. crescentes aut decrescentes per respectivas ac proprias sibi infinitesimas $e$, $a$, $o$, $\mu$ &c; ac quælibet cujuscunque indeterminatæ potestas in propriam infinitesimam ducta assumatur, ut $x^p e$, $y^p a$, $f^p o$, $z^p \mu$ &c. (quales terminos semper, ubi infinitesimam vel propriam vel alienam comitem habent, in posterum vel *proprias* vel *alienas infinitesimales* vocabimus) dico: quamlibet *propriam infinitesimalem* in suo genere, infinities (seu toties, quoties ipsa infinitesima, Verb:

Gr:

Gr: $\epsilon$ aut $\upsilon$; indeterminatam propriam, quam componit, Verb: Gr: $x$ aut $y$, ingreditur) ſumtam (quarum infiniteſimalium infinitam ſummam ſimpliciter voce *omnium* denotamus inſeqq:) æquari indeterminatæ maximæ poteſtati proxime ſuperiori ac diviſæ per ſuum exponentem: Sic omnia $x x \epsilon = \frac{1}{3} x$; omnia $z\, 3 \upsilon = \frac{1}{4} z$ + &c.

Demonſtratio eadem eſt, ac præcedentis corollarii.

13. Hinc ſequens profluit maximæ utilitatis in calculo infiniteſimali theorema; nulli, quantum mihi conſtat, adhuc animadverſum.

Sit expoſita quælibet quantitas aut æquatio, indeterminatas quaſcunque, quæ per infiniteſimas creſcunt aut decreſcunt, continens; eaque redigatur ad infiniteſimas more jam ſæpius oſtenſo; dico omnes terminos infiniteſimales infinities, juxta leges §. præced. ſumtos ex eodem expoſitæ quantitatis termino oriundos (quinam autem illi ſint, ſequens docebit ſcholium.) Ipſi termino unde originem ſumſerunt, tanquam valori abſoluto, perpetim æquari; & è converſo. Si hic valor abſolutus indeterminatæ ac maximus; in infiniteſimalium vero infinitâ ſerie continuo per infiniteſimarum applicationem mutatus intelligatur.

Demonſtratio duobus in caſibus abſolvitur:

*I*, cum

I, cum terminus Verb: Gr: $ry^p$ præter determinatas $r$, quæ nullam mutationem inferunt, unicam tantum indeterminatarum, uti $y$, continet. II, cum terminum Verb: Gr: $ry^p f^q$ plures unâ indeterminatæ $y$ & $f$, in se mutuo ductæ, ingrediuntur. In I. casu sit quantitas exposita $ry^p$; erit ea ad infinitesimas reducta $ry^p + pry^{p-1}a$. Jam esse omnia $pry^{p-1}a = ry^p$ ex §. præcedenti patet. In II. casu, sit exposita quantitas $x^p y^q z^b$; erit eadem ad infinitesimas redacta, $x^p y^q z^b + py^q z^b x^{p-1} e + qx^p z^b y^{q-1} a + bx^p y^q z^{b-1} \mu$.

Ubi tres termini infinitesimales ex uno exposito oriuntur; quos infinitesimales brevitatis ergo, litterâ $M$; expositum vero terminum littera $N$ designabimus.

Esse autem omnia $M$ æqualia absoluto valori ipsius $N$, hoc modo evincitur; fiat $N = f^d$, erit utrâque ad infinitesimas redactâ $N + M = f^d + df^{d-1} i$; & deletis æqualibus, infinitesimalibusque infinities sumtis, omnia $M$ = omnia $df^{d-1} i$; sed omnia $df^{d-1} i$ juxta præcedentem $= f^d = N$; ergo omnia $M = N$; *Q: e: d.*

Schol.

*Schol.* Potuisset generalis regula terminum quemlibet ad infinitesimas redigendi, hisce aliisque præmitti; cum autem ipsam operationis methodum sæpius, si non ad nauseam, adhibuerimus, quilibet sibi compendia ipse excogitabit. Hoc interim in calculi commodum tyrones observent: terminum quemcunque ad infinitesimas redactum esse eundem illum terminum, tot numero terminis infinitesimalibus junctum quot indeterminatas ipse terminus continuit, quomodo vero infinitesimales efformentur sequens exemplum docebit.

I. In exposito quocunque cum suo signo termino $+xxy^3z^4$, prima ordine consideretur indeterminata $x$; terminusque per ipsius $x$ exponentem multiplicatus unicâ $x$ divisionis ope demptâ, ducatur in $e$, seu propriam ipsi $x$ infinitesimam, suo signo debitè affectam; & habebitur terminus infinitesimalis primus $2y^3z^4xe$.

II. Jam, secundâ indeterminatâ $y$ assumta, eadem operatio repetatur, emergetque pro infinitesima $y$ secundus terminus infinitesimalis $3xxz^4yya$.

III. Tertia indeterm: $z$ sequatur, eodemque ordine ac lege peragantur omnia, orieturq: tertius terminus infinitesimalis $4xxy^3z^3m$.

IV. Eoque juxta omnium indeterminatarum numerum continuato, obtinebitur hoc in casu $xxy^3z^4 + 2y^3z^4xe + 3xxz^4yya + 4xxy^3z^3m$ pro termino $xxy^3z^4$ ad infinitesimas redacto. determinatæ, si termino exposito misceantur, quantitates manent. De signis non est

quod

quod laboremus, modo exponentes ac infinitesimæ legitimis suis signis affectæ adhibeantur.

Demonstrationem omitto, ex præcedentibus non paucis in locis, aut numerorum potestates exprimentium vice generaliora symbola substituendo, levi negotio petendam.

NB. In exemplum dedimus terminum pluribus indeterminatis constantem; quæ si unica tantum sit, juxta hanc unicam terminum considerandum esse quilibet videt; sic $rrx3$ ad infinitesimas redacta dabit $rrx3 + 3rrxxe$.

Conferet hoc ad pleniorem §. 35, methodique tangentium inibi traditæ, demonstrationem; & ad legitimam ex terminis infinitesimalibus ad eos, unde ortum duxerunt, regressionem; quam, ut hujus scholii conversum, hinc cognitam supponimus, in quantum eorum, quæ modo tradidimus, natura patitur.

14. Sit Fig. XXXIV, curvilineum *ADFO* idem ac §. 11, eademque symbola; intelliganturque subtangentes *TQ* in *MD*, *VO* in *LE* &c. perpetuo applicari servato ad ipsam *AQ* parallelismo: erit juxta §. 11. ostensa trapezium *MDEL* = *ta*; adeoque trilineum *LAF* = omnia *te* = trilineo *AFO* seu omnibus *ye*, ex eadem §. 11.

*Coroll.* Unde factis *TM* = *DQ*, *LV* = *PE* &c. donec enata sit curva *LMA*, erit, vocata *AT*: *z*, cum sit *MT* = *y*, relatio curvæ *LMA* ex relatione curvæ *ADF* cognita; datoque spatio *ADQ*, datur spatium *TMA* = rectangulo *MDQT* — spatii *ADQ* duplo; & contra.

15. Sit

15. Sit *Fig. XXXV.* curvilineum AFO; curvamque tangens *TD* producatur, donec prolongatæ OF occurrat in *S*; vocenturque *TQ*:*t*; *AQ*:*x*, *QD*:*y*, *DI*:*l*, *IS*:*h*; infinitesimæ *DH*:*e*, *FH*:*a*. Statuaturque SO seu $h+y$ perpetim in QB, donec describi possit nova curva OBR: erit spatium ARO semper duplum ipsius AOF.

Est enim spatium ARO juxta §. 4. = omnia $he+ye$; sed omnia $he$ secundum §. 2. = omnia $ye$; quare omnia $he+ye$ = totidem $2ye$, unde constat propositum.

*Coroll.* Sit AEF arcus circuli; erit, facto radio = *x*; OS = $\frac{rr}{y}$; unde curvilineum AOR, hanc habens ad circulum relationem æquabitur duplæ circuli portioni AOF.

16. Quod si ipsa QB perpetuo adæquetur subtangenti *IS* seu *h* erit spatium ARO æquale spatio AFO: cum enim sit perpetuo $la = he$, ex §. 2. apparet intentum.

*Coroll. I.* Patet hinc ratio ad eundem axem AQ seu *x*, non duo tantum curvilinea AFO, ARO constituendi, quæ sibi mutuo æquantur, verum & pro lubitu multa; siquidem tractato curvilineo ARO denuo, eodem more, quo in curvilineo AFO usi sumus, novum ad eundem axem applicabile emerget curvilineum pro-

prioribus æquale; & sic in infinitum. plura hinc tetragonismorum genera originem ducunt & multifaria spatiorum inter se comparatio.

*Coroll. II.* Sic *Fig. XIII.* N. 1. cissois in ratione ad Circulum mensuratur; resumto enim §. 31. Cap. I, erat *RL*, $t = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z$, seu $3y = 2t - z$; & ductis omnibus in *QP*: $e$, fiet $3ye = 2te - ze$: cum autem semper sit $te = lo$; seu (posita $BQ = RL = t$ ad curvam *ABC*) trapezium $BQPC = NLMK$; erunt omnia $te$; seu spatium curva *ABCK* & rectis *AO*, *OS*, interjectum, æquale integro spatio Cissoidali seu omnibus $lo$: & si omnia $ye$, seu semicirculus dicatur $c$, ac omnia $ze$ seu spatium Cissoidale vocetur $f$; cum fuerit omn. $3ye$ = omn. $2te$ — omn. $ze$, erit $3c = 2f - f$, adeoque $3c = f$, & cissois semicirculi tripla.

*Coroll. III.* Hoc modo Cycloidum mensura indagatur; quæ, prout hic tractatur, exempli loco, in cæteris, tyronibus servire potest.

Sit *Fig. XXXVI.* Cyclois *ALMD* ad semicirculum *ABCG* relata; hanc tangat recta *IEMS*; sit centrum Circuli *F*; vocenturque *IE*: $t$, *VS*: $s$, *LE*: $z$, *BE*: $y$; *LV* seu *EG*: $x$, arcus *AB*: $c$; æquatio Cycloidis sit $p : q :: z - y :: c :: LB : AB$; erit, juxta §. 59. Cap. I. *IE* seu $t = \frac{qyz}{pr - q + qx}$ & quia $IE : EL :: LV : VS$. erit *VS*, seu $s = \frac{xx}{y}$ $\frac{+ prx - qrx}{qy}$.

 Jam

Jam vero appellatis, $DE$, $BP$. $LN$: $e$, $CP$: $a$, $MN$: $i$, quia $SV$: $VL$:: $MN$: $LN$. seu $s$: $x$:: $i$: $e$. erit semper $xi = se$; unde, positâ $SV$ seu $s$ in $ET$, descriptâque curva $EHT$ erunt omnia $xi$, seu rectangula $LVR$, sive totum Cycloidis $AOG$ spatium, æquale omnibus $se$, seu rectangulis $TED$, hoc est integro spatio $GATT$; quarè inventâ hujus spatii $GAT$, seu omnium $se$, ratione ad Circulum, inventa erit spatii Cycloidalis, seu omnium $xi$, ratio ad eundem.

Quod ut fiat: sit primo $ALO$ cyclois primaria, erit $p = y$, adeoque $SV = ET = \frac{xx}{y}$: Unde patet curvam $GAT$ esse Cissoidem: sed, ex modo dictis, cissoidale spatium hoc cycloidali exposito æquatur, seu omn. $se$ = omn. $xi$; adeoque & hoc est semicirculi triplum juxta coroll. præc. Hoc notabo: quia semper est: $se = xi$, si ad eundem semicirculum, tum cyclois $AOG$, tum cissois $AGTT$, referantur; ductâ $LV$ ipsi $AG$ parallelâ, eique normali $LT$, fore semper spatium $LVO$ æquale spatio $ETG$.

Quod si cyclois alterius sit generis, & $s = \frac{xx}{y} + \frac{prx - arx}{qy}$; quoniam $\frac{xx}{y}$ manet ad cissoidem; si jam innotesceret, quam rationem curvilineum, cujus applicata $\frac{rx}{y}$, haberet ad semicirculum;

ex

ex §. 8. ac applicatarum summâ notum foret spatium omnium $s.e$, unde quæstio ad sequentem devolvitur:

Sit centro $F$ descriptus semicirculus $ASG$, voceturque radius $r$, $GD:x$, $DC:y$, $DA:2r-x=l=MH$; *Fig. XXXVII.* sit item alia curva $GHT$, cujus applicata $DH=\frac{rx}{y}=f$; tangat vero $HK$ curvam in $H$, dicaturque $KM:t$, $PC$, $ED$, $NH:e$, $NT:o$, $BP:a$; erit I. æquatio $KM:MH::NT:NH$, unde $lo=te$. II. Æquatio ex naturâ curvæ $\frac{rx}{y}=f$; seu $\frac{rx}{f}=y=\frac{lx}{y}$, quare $ry=fl$; & $rx=fy$ redacta ad infinitesimas $re=fa+yo$.

III. Ex natura circuli $lx=yy=2rx-xx$; unde $re-xe=ay$ jam autem ex I. & II æquationibus, est $o=\frac{te}{l}=\frac{re-fa}{y}$, unde $a=\frac{rle-tye}{fl}=\frac{re-xe}{y}$, quâ ordinatâ & facto $fl=ry$ dabit $rl-ty=rr-rx$; & loco $l$ posito $2r-x$; fit $t=\frac{rr}{y}=KM$: quæ si ponatur in $ID$ ad curvam $VSI$, erit; cum sit $te=lo$, spatium rectis $ZA$, $GO$ & curva $VSI$ comprehensum, seu omnia $te$, æquale spatio exposito rectis $AG$, $AL$, & curva $GHT$ interjecto, seu omn $lo$.

Jam autem denuo oporteret rationem curvi-

 lineæ

linei (cujus applic. ID seu $\frac{rr}{y} = t$) ad semicirculum indagare. Sed in hoc particulari ad Circulum casu aliam viam ingrediemur; Ad radium *FS* ducatur normalis *SR*, secans radium FC productum in *R*, voceturque *BC*: *u*, erit (quia DC, *y*: FC, *r*:: SF, *r*; FR, $\frac{rr}{y} = t$) *y*: *r*:: *r*: *t*:: PC, *e*: BC: *u*: quare semper $ru = te$; jam autem semicirculus est æqualis omnibus triangulis BFC seu $\frac{ru}{2}$, hinc omnia *ru* semicirculi duplum; adeoque & omnia *te* = omnia *le* = spatium KAGT, quod æquivalet omnibus *fe*. Jam concludendo, fiat $\frac{xx}{y} = h$; &, quia $\frac{rx}{y} = f$, erit $se = he + \frac{p-q}{q} f.e$; vocato jam cycloidali spat. *k*, semicirculo: *d*, emerget, quia omnia $he = 3d$, & omnia $fe$, $= 2d$, hæc æquatio $k = \frac{2pd+qd}{q}$; & orietur Torcellii regula, quia ratio *q* ad *p* est ratio peripheriæ semicirculi ABG ad basin Cycloidis cujusvis GOA.

*Coroll.* IV. Eodem modo & *Fig.* XXXVIII. Complementum Cycloidis AQO metimur. Vocetur enim BE: *y*, LE: *z*, AB: *e*, AE seu KL: *x*, EF: $l = r - x$ (si radius dicatur *r*) & KV: *s*; recta LV tangat curvam, erit existente æquatione Cycloidis, $p : q :: z - y : e$, linea IE $= \frac{qyz}{pr+ql}$ (uti præced: Coroll. insinuatum) &, quia $l = r - x$,

erit

erit I E $= \frac{qrz}{pr + qr - qx}$; jam vero I E: EL :: KL: KV $= s = \frac{prx + qrx - xx}{qy \quad y}$; quia autem posita SL $= i$, & S M: $= e$, est K V: K L:: S L: S M. Sive $s: x:: i: e$, erit semper $xi = se$, & posito R T $= s$ ad curvam Q R O, spat. A Q O seu omn. $xi$, $=$ spat. QRO seu omn. $se = \frac{prxe + qrxe - xxe}{qy \quad y}$, hoc est, facto semicirculo $= d$, (quia per Coroll: præc. omnia $\frac{rx}{y} e = 2d$, & omn. $\frac{xx}{y} e = 3d$) omnia $se = \frac{2p - q}{q} d =$ complem. Cycloidis A Q O. Quod si $p = q$ ponatur, cyclois erit primaria, ac compl: A Q O æquale semicirculo $d$. sed & cum hoc casu sit $s = \frac{2rx - xx}{y} = y$; ex proprietate semicirculi, patet R T ac B E semper æquari & Q R O esse semicirculum; adeoque semper esse $se = ye = xi$; seu spat. A K L continuo æquari spat. Q R T seu A B E.

*Corol. V.* Sit jam ALO alterius naturæ Cyclöis *Fig. XXXVIII.* cujus æquatio (retentis per omnia superioribus symbolis) $p: q::$ E L: arc. $AB::$ $z: e$. Unde $qz = pe$; & juxta tangentium methodum $IE = \frac{qrz}{pr}$, ac $KV$ seu $s = \frac{prx}{qy}$; quare omnia $se =$ omn. $xi =$ comp: $QOA = \frac{2pd}{q}$; quod si subtrahatur ex rectangulo $QAGO$ seu $\frac{2pkr}{q}$ (posito $k$ æquali semiperipheriæ $ABCG$)

seu $\frac{4dp}{q}$, remanebit spatium *AOG* $= \frac{2pd}{q}$, æquale suo complemento. Si $p = q$, erit alterutrum $= 2d$ seu semicirculi duplum.

*Coroll. VI.* Repetitis symbolis §. 62. C. 1, assumtâque inibi traditâ hypothesi; *F. XVII.* si *ABCD* sit quadrans circuli, ac *KE* curvam tangat, erit, juxta §. 63. cap. 1, *KM* seu $t = \frac{rh}{d}$, quare $d : r :: h : t$; & juxta lemma 46, (quia ratio *d* ad *r* perpetuo manet eadem) $d : r :: ha : ta$; sed citato §. 62. $ha = uy$, & $ta = ye$, quare $d : r :: uy : ye$; verum ex proprietate semicirculi *BQ* : *BN* :: *CB* : *BR* seu $r : y :: u : i$; unde $uy = ri$; adeoque erit $d : r :: ri : ye$; hoc est radius *r* ad quadrantem peripheriæ *d*, ut spatium *AFDQ* seu omnia *ye* ad quadratum in *AQ* seu omn. $ri = rr$. Secundum 1. II. Euclid.

*Coroll. VII.* Resumtâ curvâ §. 30. cap. 1, *Fig. XII.* cæterisque ut inibi suppositis, nimirum $r^p - x^p = y^p$ pro æquatione curvæ *AEF*, factis scilicet *QO* : $x$, *QD* : $y$; tum & $y^s = r^{s-1}z$, pro æquatione curvæ *ANG*, cujus applicata *QN* : $z$, erit, juxta §. 30. cap. 1, *RL* seu $t = \frac{sy^{s-p}}{r^{s-p-1}} - sz$; unde cognitâ figurâ *ADFO* seu omnibus *ye* cognoscetur figura *AOG* seu omnia *ze*.

Sit enim primo $s = p + 1$; erit æquatio inter utrius-

utriusque curvæ applicatas, $y^{p+1} = r^p z$, ac *RL* seu $t = \overline{p+1}\, y - \overline{p-1}\, z$. Cum autem juxta 38. cap. 1, sit continuo $te = xv$, hoc est (posito *RL* seu *t* in *QS* donec descripta sit curva *ASVP*) figura *ASVPO* seu omnia *te* æqualis figuræ *ANKGO* seu omnibus *xo*, quæ æquantur omnibus *ze*; quia eandem figuram juxta §. 1. & 2. hujus constituunt: erunt & omnia $te =$ omn. $ze$. unde factis omnibus *te* seu omnibus $ze = b$, & omnibus $ye = c$, erit (quia modo sunt $te = \overline{p+1}\, ye - \overline{p-1}\, ze$) quoque $b = \overline{p+1}\, c - \overline{p-1}\, b$, seu $\frac{p+1\, c}{p+2} = b =$ figura *AGQ*; unde posita figura *ADFQ* ad quadrantem circuli erit $p = 2$, adeoque $\frac{3}{4} c = b$: & æquationes $rr - xx = yy$ [illegible] $= rrz$, seu $rr - xx$ [illegible] $= rrz$ [illegible].

Jam, manente quadrantis circularis hypothesi, fiat curvæ *AGO* applicata *h*, & æquatio $y^3 = r^2 h$, fiet $z = s$, & $p =$ [illegible], unde *RL* seu *t* $= \frac{5y^3}{rr} - 5h$; eritque factis omnibus $he = d$, (cum ex modo inventis omnia $\frac{y^3}{rr} e$ seu omnia *ze* fuerint $= \frac{4}{4} c$) $d = \frac{8}{4} c - 5d$, seu $d = \frac{1}{6} c$.

*Schol:* Ne autem particularibus nimium inhæreamus, methodum generalem addo, quælibet curvilinea in alia infiniti generis transmutandi, cum & plurimorum mensuras inveniendi; ex solo præcedenti § 4. deductam.

17. Sit curva, *Fig. XXXIX.* $AEF$, vocenturque $DQ : y$, $AQ : x$, subtangens $TQ : t$, tangens $TD : s$, huic normalis $DR : k$, subnormalis $QR : l$, curva $AD : c$, infinitesimæ $DH : e$, $EH : a$, $HE : u$; jungaturque *Fig.* XL, $\alpha\varphi q$ ejus naturæ, ut $\alpha\varphi$ per omnia exactè quadret curvæ $AEF$, sitque $\delta$ æqualis parti curvæ infinitesimæ $DE$ seu $u$, tandem $\alpha\varphi$, $\pi\delta$, $\alpha\delta$ sint applicatæ. Assumanturque indeterminatæ $h$ & $z$, ac fiat quælibet hypothesis; sitque

I. $he = za$; erit applicatâ perpetuò $h$ in $QC$ ad $e$, nec non $z$ in $IM$ ad $a$, juxta §. 4, omnia $he$ seu spatium $ASO$ æquale omnibus $za$ seu spatio $OFK$.

II. Fiat $he = zu$; erit, positâ curvâ $ADEF$ in directum in $\alpha\varphi$, ac semper applicatâ $\alpha\delta$ seu $z$ ad $h$ seu $u$, area $\alpha\delta\varphi$ seu omnia $zu$ æqualis areæ $ASO$ seu omnibus $he$.

III. Sic & facto $za = hu$; erit, existente continuò $\alpha\delta = h$, & $IM = z$, trilineum $\alpha\delta\varphi$ æquale trilineo $OBK$.

Unde patet, datâ curvæ $ADE$ proprietate, ac sumta ipsarum $z$ & $h$ alterutrâ ad arbitrium, reliquam semper per infinitesimarum rationem determinari; hanc autem rationem ex curvæ $ADF$ naturâ dari plus quam cognitum est, est enim $s : t :: u : e$. item $s : y :: u : a$. nec non $t : y :: e : a$.

*Coroll.* I. Hinc cujuslibet curvilinei transmutationes infinitæ. resumtâ enim primâ hypothesi $ha = za$ cum sit ex proprietate curvæ cujuscunque

queque $ye = ta$ erit $\frac{tb}{y} = z$; unde sumpta $b$ pro arbitrio, Verb: G: ad circulum $= \sqrt{2rx - xx}$, si $y = DQ$ sit ad parabolam $= \sqrt{rx}$, erit $z = 2x \frac{\sqrt{2r - x}}{r}$; quæ mediante parabolæ æquatione $rx = yy$ expressa per $y$ (cum hic $z$ ad $e$, seu ipsius $y$ infinitesimam, applicari supponatur) dabit $z = \frac{2yy}{r} \frac{\sqrt{2rr - yy}}{rr}$; adeoque relationem curvæ $OMK$, cum autem, retento ipsius $b$ valore & loco, possit $DQ$ ad infinitas curvas statui; & modo prædicto ex singulis emergat alius naturæ curvilineum, quorum singula nihilominus circulo seu omnibus $be$ æquantur; patet dato cuilibet spatio infinita æqualia hac methodo exhiberi posse: quod in multis casibus non exigui est usus.

Sic & ex hypothesi secunda $be = zu$, manentibus $b$ ad circulum & $y$ ad parabolam, cum sit $se = tu$, erit $\frac{tb}{s} = z$; unde $s$ & $t$ ex natura parabolæ, $b$ ex natura circuli cognitis, ipsa $z$ magnitudine nota est: quæ ad $\alpha\varphi$ curvæ $AF$ æqualem applicata efficiet trilineum $\alpha\varphi$ æquale ipsi $ASO$.

*Coroll. II.* Quod si $z$ ad quamcunque curvam, spatium cognitum continentem, statuatur, ad triangulum, parallelogrammum, paraboliformium quandam aut alius generis quadrabilem; erit & $b$ ad locum cognitum) cujus spatium mensuram patitur; unde mutatâ rursus curvâ $ADF$

in infinitum, infinita dantur spatia mensurabilia, & assumto cuidam curvilineo æqualia.

Ex: G: in hypothesi primâ $he = za$, factâ $z$ æquali determinatæ $r$, erit $h = \frac{ry}{t}$; unde, $y$ & $t$ ex curvæ $ADF$ relatione cognitis, erit $ASO$ æquale omnibus $ra$ seu $ry$ seu rectangulo $FOGK$. Idem si fiat in hypothesi secundâ $he = zu$ erit $h = \frac{sr}{t}$, & spatium $ASO$ æquale rectangulo $\alpha\phi o\mu$, seu $r$ in curvam $AF$; quod si assumatur $z = c$ erit $he = cu$; & spatium $AOS$ æquale semiquadrato curvæ $AF$.

*Coroll. III.* Nec hypothesis in duobus tantum terminis consistat necesse est, cum infinitis fere modis variata assumi possit. Sit in exemplum $ye + xa = he$; est $ye$ ad curvilineum $AFO$, $xa$ ad ejus complementum $AFV$, & $he$ (facto $QC = h$) ad trilineum $ASO$; unde hoc in casu semper $AQC =$ rectangulo $XDQA$: quod si proprietatem curvæ $ACS$ invenire quis velit (cum ex data curva $AEF$ etiam $x$ & $y$ data sint) est $he = ta$; adeoque $h = \frac{xy + ty}{t}$; quæ ope curvæ $ADF$ expressa per interceptam $x$ dabit quæsitum.

Sic assumto $za + he = fu$ (positâ $f$ pro tertia indeterminata ad $\alpha\iota$ applicabili) unicâ Verb. Gr. $f$ pro lubitu determinatâ $= r$ & elisis infinitesimis

nis emerget $zy + th = rs$; unde altera quoque ex ipsis $z$ vel $h$, præter ipsam $f$, adhuc arbitrio relinquitur.

18. Hoc addam, licet præcedentis tantum sit consectarium, in hypothesi prima $he = za$ fiat $z = y$ erit $h = l$; adeoque $le = ya$; & omnia $le$ seu spatium *AOS* (cujus applicata *QC* semper æqualis est subnormali respectivæ *QR*) æquatur *FOK* seu semi quadrato ipsius FO. Cum enim perpetuo sit IO = I$\pi$ erit I$\pi$ ad triangulum isosceles tum & ex §. 13 notum esse omnia $ya = \frac{yy}{2}$.

*Coroll. I.* Hinc opulenta rursus mensurabilium spatiorum copia, & ex quâvis curva *ADE* infiniti generis; positâ enim quâcunque subnormali *QR* in *QC*, nascetur *AOS* spatium mensuræ capax; cujus si rursus subnormalis inquiratur, aliud rursus spatium & sic sine fine, enascentur ex unâ eâdemque curvâ *ADE* curvilinea magnitudinem cognitam habentia, quod ex præcedenti satis manifestum est.

*Coroll: II.* Quin & hæc, præter alias methodos, curvarum generalem absolveret quadraturam; si solvi posset problema §. 95 cap. I. propositum; hoc est si, datâ qualibet *QC* per *QA* seu $x$ expressâ, inveniri posset curva *ADE*, cujus subnormalis *QR* ipsi *QC* perpetuo ac respecti-

pecti-

pecti *QR* ipsi *QC* perpetuo ac respectivè adæquaretur unde, si $QC = QR$ datâ foret in terminis æquationis curvæ *ADE* proximis, obtineretur intentum, juxta Cap. I, §. 93, & seqq. Modi hoc inquirendi varii Cap. I. 95. &c. videri possunt.

Quibus hunc adjungo; cum referat omnium subnormalium ad curvas tum geometricas, quæ per solas *x* & *y*; tum & alias, quæ per curvam *c* quocunque modo efferuntur, pertinentium terminos proximos.

Fiat $z + f + g + b + d + h + k + m = 0$.

Ac terminorum quorumlibet summa, in quibus sub quibuscunque signis, invenitur potestas quælibet ipsius *x* designetur per *z*, ipsius *y* per *f*, ipsius *c* per *g*, tum ipsarum *x* & *y* per *b*, ipsarum *x* & *c* per *d*, ipsarum *y* & *c* per *h*, omnium denique *x* & *y* & *c* per *k*; determinati termini vocentur *m*. tum littera quamcunque terminorum seriem in singulis terminis per exponentes respectivos ipsius *x* multiplicans dicatur *A*; quæ hoc idem in omnibus ratione ipsius *y* præstat, fit *B*; quæ ratione ipsius *c* appelletur *D*: NB. Has terminorum series per A, B, D, &c. hoc est in singulis terminis per ejusdem indeterminatæ exponentes respectivos multiplicatas, aut divisas, in posterum *subtangentialiter* multiplicatas aut divisas appellabo.

Sequitur I. omnes curvarum designatas æquationes per modo propositam exprimi; uti cuilibet patet; cum omnis generis & multitudinis terminos involvat.

II. Hanc juxta regulam §. 95. Cap. I. tractatam omnium curvarum, tum geometricarum, tum *c* continentium, subnormales *l*, generali hac æquatione exhibere; juxta denotationem §. 96. Cap. I. adeoque *l* æquabitur.

$$\frac{\overline{(Az)} + \overline{(Ab)} + \overline{(Ad)} + \overline{(Ak)} \text{ in } \overline{cyy}}{-\overline{(Bf)} - \overline{(Bb)} - \overline{(Bh)} - \overline{(Bk)} \text{ in } \overline{cx} - \overline{(Dg)} - \overline{(Dd)} - \overline{(Dh)} - \overline{(Dk)} \text{ in } \overline{xx}}$$

Exem-

Exemplum in tyronum gratiam addam: sit *Fig.* XXXIX. curva *ADE*; cujus æquatio $2rx - xx = yy + xy + ry + rr$; Quæritur *QR*, seu *l*, ejus subnormalis.

Positâ æquatione, ut supra, nihilo æquali; erit $2rx - xx - yy - xy - ry - rr = 0$; videre est *c* hanc æquationem non ingredi; quare ad hanc pertinentes quantitates *g*, *d*, *h*, *k*, nihilo fiunt æquales; solæque, *z* quæ *x*; *f* quæ *y*, *b* quæ *x* & *y* continet, reservandæ; fietque per *c* divisione institutâ $l = \frac{(Az)yy + (Ab)yy}{-(Bf)x - (Bb)x}$, unde loco *z* substituto $2rx - xx$, loco *f* posito $-yy - ry$, tandem pro *b* ipso $-xy$, servatis in singulis additis signis, fiet, omnibus juxta *A*, *B*, &c. subtangentialiter multiplicatis, ad divisis per *xy*, subnormalis $l = \frac{2ry - 2xy - yy}{2y + r + x}$.

*Schol.* Hoc solum ac unicum restare videtur: ut ipsa *l*, per terminos hosce generales explicata, in curvis geometricis per solam *x* posset efferri, juxta canonem omnibus curvis convenientem & universalem; unde primo fere intuitu appareret in quâlibet curvâ, num juxta præcedentis tenorem posset quadrari; & an inter varias, quæ hinc enascerentur, relationum expressiones aliqua reperiretur, quæ expositæ curvæ proprietati congrueret.

Videbantur hæc inter subnormalium inventiones Cap. I. tractatas sibi locum vendicare; verum quoniam curvilineorum hinc orientium quadraturæ primario considerantur, malui hanc methodum huic potius loco, tanquam ei, quod intendimus, convenientissimo inserere. Sed ad corrollaria revertor.

Coroll.

*Coroll. III.* Hinc eadem, quæ in §. 11. coroll. ex alio principio ostendimus, originem ducunt; seríerumque juxta *Clari Wallis:* tum auctarum tum multatarum aggregata & residua, horumque potestates quælibet in debita sua ratione ad totidem maxima constituuntur; quæ §. præcedentis non nisi particularem casum efficiunt.

Ex: Gr: *Fig. XXXIX.* positâ $AQ = x$, & $QB = n$: sit $z$ quotlibet terminorum simplicium $x$ continentium summa, & curvæ $ABS$ æquatio $np = z$; quæruntur omnia $npe$ seu omnia $ze$. Quapropter fiat $z = np = ml$; sitque $l = QC$, eique semper æqualis curvæ $ADE$ subnormalis $QR$; erit ergo $l = \frac{z}{m}$; & juxta Cap. I. §. 97. Coroll. I. æquatio curvæ $ADE$ $\left(\frac{zx}{A}\right) = \frac{myy}{2}$; sed omnia $le = \frac{yy}{2}$ ex præced: ergo $\left(\frac{zx}{A}\right) =$ omnia $mle =$ omnia $ze$, quæ erant invenienda.

Unde hæc regula; omnia $ze$, (seu facto in exemplum $z = rx \mp xx$) omnia $rxe \mp xxe$ æquantur ipsi $zx$ subtangentialiter per $A$ divisæ; hoc est seriei datæ $z$ unicâ ipsius $x$ dimensione auctæ, & postea in singulis terminis per potestatem ipsius $x$ divisæ $= \frac{1}{2}rxx \mp \frac{1}{3}x^3$, hinc §. 12. rursus demonstrari potest. Posse autem potestates ipsius $x$, in terminis ipsam $z$ componentibus, nunc per numeros fractos nunc per negati-

vos

vos designari; tum & dignitates quaslibet aggregatorum serierum auctarum aut multatarum, per symbolum $z$ efferri; notius est quam ut hic ostendi mereatur.

*Coroll. IV.* Oritur hinc, & ex §. præced:, multifaria methodus, quâ ex dato curvilineo A Q C, in terminis quibuscunque algebraïcis, ipsius applicatæ Q C ad interceptam A Q relatio exhibetur. Hæc inter sequentia ex fundamento magis generali deducemus.

19. His annectere liceat facillimam curvilineorum quorumcunque transmutationem, substractionem, additionem &c. ex §. 6, 7, 8, 9. directè manantes.

Sit in exemplum (resumtis §. modo citatorum symbolis ac *Fig. XXVII.*) $z + b = y$. supponatur $z = \sqrt{2}\frac{xx}{rx - xx}$ ad Cissoidem; $b = \sqrt{2rx - xx}$ ad semicirculum correspondentem; fiet $y = \frac{2rx}{\sqrt{2rx - xx}}$. Jam autem omnia $ye$ æquantur omnibus $be$ quater sumtis, seu quatuor semicirculis, ex §. 16. Cor. III. & juxta hypothesin omnib. $be + ze$ seu spatio infinito Cissoidali cum semicirculo: quare Cissoidale spatium semicirculi triplum est.

*Coroll.* Posset $y$ supponi æqualis quotlibet applicatis $z + b + f + g$ &c. quibuslibet signis affectis; unde

unde positâ $y$ ad curvam datam quamlibet; cæterisque, exceptâ unicâ, ex arbitrio determinatis, ultima definitione sui patefaciet curvæ naturam, cujus spatium cum reliquarum omnium areis nunc simul additis, nunc pro variâ signorum naturâ à se mutuo subductis, æquabit datum spatium seu omnia $y e$. verum, quæ hic ob tantam applicatarum copiam arbitrio relictam se pandunt, speculationes prætcribo.

20. Hoc addo: si assumpta spatia quadraturam admittant, etiam quod ex iis per additionem aut substractionem componitur, erit quadrabile: possuntque hic curvilinea quælibet, quæ mensuram pati aliunde novimus, adhiberi; horum autem æquationes si ad paraboloidum hyperboliformiumque loca consistant, erunt & omnes ipsius $y$ potestates cognitæ: quod leviter ad præcedentia attendenti ignotum esse nequit.

*Coroll.* Possent hæ omnes potestatum, ac spatiorum mensurabilium hinc oriundæ diversitates in ordinem redigi, a simplicioribus ad magis composita progrediendo, ac theoremata quædam efformari, quod provectioribus facile, in minus exercitatorum tamen commodum hoc generalius paulo specimen subnecto.

Detur. $y^{f} \infty \overline{\frac{z^{d}}{g^{s}} + \frac{q^{m}}{c^{l}}}^{\,t}$ in $\overline{\frac{h^{?}}{n\,b^{?}}}^{\,k}$

Ac litteræ, $d, m, s, l, f, k, n, p$, quantitatum præpositarum potestatem designent; item $t$, verum hæc binomii, lineolâ superinductâ notati, dignitatem generalem significat; reliquæ, $z, g, q, c, h, b$, sunt singulæ ad locum quendam spatio mensurabilem; qualia sunt rectangulum, triangulum, paraboloïdea quæcunque, aut hyperboliformia; quæ hoc in exemplo tantum considerabimus.

Dico, si fiat $f = 1$, curvilineum, cujus applicata $y$, quadraturam admittere, consequentiæ ratio ex §. 11. cum annexis corollariis manifesta est.

Ex: Gr: factis $m = d$, item $s$ & $l$ nihilo æqualibus, omnibusq. ad dignitatem $p$ evectis, ac tandem in analogismum resolutis, fiet $b^n : h^k ::$ $\overline{z^{\frac{d}{d}} \mp Q}^{\frac{tp}{d}} : y^p$. Unde posito rursum $d = 1$, emerget hæcce, cum $y$ supposita sit unius dimensionis, inter potestatum exponentes æquatio $t + \frac{k}{p} - \frac{n}{p} = 1$, seu $pt + k - p = n$:; denique ut â simplicissimis incipiamus, assumtis $b = r$, $h = x$, $z = r$, $q = x$, oritur proportio nova, quæ, facto $t = 1$, in sequentem abibit $r^k : x^k :: \overline{r \mp x}^p$ $: y^p$, quæ, signo negativo retento, est curvilinei â Clar: *Slusio* mensurati.

Sic & pro variâ tum quantitatum, tum exponentium assumtione variæ continuo enascuntur

curvarum proprietates, quæ omnes sunt spatio mensurabiles, ut factis $b = x$ & $h = r$ erit $xk : rk : : \overline{r \mp x}^{p} : y^{p}$.

*Schol.* Quanta vero hinc theorematum, ac mensurabilium curvilineorum copia enascatur, nulli non manifestum esse potest; qui ex aliis tum potestatum, tum reliquarum quantitatum, hypothesibus alias in infinitum oriri curvas; tum & pro singulis, in æquatione generali, fractionum numeratoribus, quotlibet terminorum, simpliciter $x$ cum determinatis continentium, aggregata tuto assumi posse perspexerit. modo hæc sequentia observentur; I. ne plures uno terminos ipsi fractionum denominatores contineant II. ne potestas per $t$ designata, nisi per numerum affirmativum aut integrum explicetur; cæteris $d$, $m$, $s$, &c. supponentis bene placito relictis.

Quod, si secus hæc sese habeant, ac deveniatur igitur ad hanc aut similem æquationem $y = \frac{rr}{r \mp x}$ aut $y = \sqrt{rr - xx}$; nulla adhuc hic regula tradita est (nisi forte inter subnormales repertæ ex §. 18. mensuram invenirent) quâ omnium $y$e valorem absolutum indagare possimus; nisi adhibitâ prius reductione, quam per *divisiones Mercator*, per *extractiones* inclytus *Newton* ad optatam metam perduxerunt. utraque hæc, tum divisionis tum extractionis operatio potestatum in binomiis designatione perficitur; uti mox subnectendo theoremate patebit.

21. Est autem theorema hujusmodi: sit binomium quodcunque $z + f$ evehendum ad potestatem quamcunque designatam $p$: erit (posito termino hujus potestatis in ordine primo $= 1\, z^{p}$ cujus genitura $= 1$) hæc, quæ sequitur, generalis pro terminorum reliquorum genituris congruis

gruis

gtuis inveniendis regula. Assumto quolibet termino, exponens ipsius $z$ multiplicetur per genituram ejusdem termini; ac productum dividatur per numerum loci, quem assumtus terminus in Ordine potestatis obtinet; & habebitur genitura termini sequentis.

Ex: Gr: $z+f$ sit attollendum ad potestatem qquadratam: erit $1\ z^4$ terminus *I*; tum 4 per 1 multiplicetur, ac productum divisum per 1. (cum terminus sit ordine primus) erit sequentis termini genitura $=4$, adeoque $4fz^3$ terminus *II*. hic denuo multiplicato 3 per 4 fiet productum 12, quod divisum per 2 (cum terminus sit ordine secundus) dabit sequentis seu tertii genituram 6, qui idcirco fiet $=6ffzz$: & sic pergendo obtinebitur levi operâ binomii cujuscunque quælibet potestas. Quare si $z+f$ elevanda sit ad dignitatem $p$, erit terminorum hanc componentium series ea, quæ sequitur. Et

*Genituræ termini*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I... | $1$ | — | — | — | $= A$.. in $z^p$ |
| II... | $p$ | — | — | — | $= B$.. in $fz^{p-1}$ |
| III... | $p$ in | $\frac{p-1}{2}$ | — | — | $= C$.. in $ffz^{p-2}$ |
| IV... | $p$ in | $\frac{p-1}{2}$ in | $\frac{p-2}{3}$ | — | $= D$.. in $f^3 z^{p-3}$ |
| V... | $p$ in | $\frac{p-1}{2}$ in | $\frac{p-2}{3}$ in | $\frac{p-3}{4}$ | $= E$.. in $f^4 z^{p-4}$ |

Et sic pergendo, donec in geniturarum progressione numerus (ipsi $p$ ex supposito æqualis) ex ipso $p$ subducendus veniat; unde isthæc genitura, cæteræq. eam subsequentes nihilo æquales evadent, adeoq: & reliqui termini evanescent.

Potest $p$ in numeri fracti modum, ut $\frac{k}{n}$, proponi, ad *extractiones radicum* perficiendas; tum & instar numeri negativi $-p$, quod *divisionibus* inservit & hoc pacto nova in his casibus geniturarum & terminorum tabula efformari.

22. Hinc primo hyperbolici spatii asymtotis interjecti, Fig. XXX. mensura per infinitam seriem explicatur: facto enim $AQ = QD = r$, & $QO: x$, ac $BO: y$, erit. $\frac{rr}{r+x} = y$; quæruntur jam (positâ $e$ asymtoti infinitesimâ) omnia $ye$, seu spatium, $VBDQOV$ versus $V$ interminabile.

Quare. Juxta *Cl: Mercatorem* $rr$ dividendum venit per $r+x$; seu (quod ex potestatum denotatione cognitum est.) $rr$ est multiplicandum in $\overline{r+x}^{\,-1}$; cum mutatio signi exponentis ex affirmativo in negativum, quantitatem præpositam vertat ex divisore in multiplicatorem & contra. consulantur lemmata 50, 51, & seqq.

Ut ergo $r+x$ evehatur ad potestatem $-1$, erit $p = -1$, & terminorum genituræ successivæ

$= 1-1$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ &c. adeoque facto $z = r$, & $f = x$, erit.

$\overline{r+x}^{-1} = r^{-1} - xr^{-2} + xxr^{-3} - x^3 r^{-4}$ &c. *in infinitum.* Hinc, quantitatibus, quarum exponentes negativi sunt, ad divisores reductis, singulisq; terminis per $rr$ multiplicatis emerget.

$\frac{rr}{r+x} = y = r - x + \frac{xx}{r} - \frac{x^3}{rr} + $ &c.

Adeoque omnia $ye$ = Seriëi terminorum, quorum singuli in $e$ ducti sunt; ac per § 12 omnia $ye$

$= rx - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3r} - \frac{x^4}{4rr}$ & *sic continuando seriem in infinitum.*

§. 23. Tum & eodem fonte scaturit infinita series, in Figurâ XXXII, quamlibet quadrantis Circuli $AOF$ portionem determinans. Sit enim radius $AO$: $r$, $O\underline{Q}$: $x$, $\underline{QD}$: $y$, unde $yy =$ $rr - xx$, & $y = \sqrt{rr - xx} = \overline{rr - xx}^{\frac{1}{2}}$, seu eadem $rr - xx$ ad dignitatem $\frac{1}{2}$ evecta, hinc describendo ex eodem §. 21. Potestatem binomii $rr - xx$ juxta exponentem $\frac{1}{2}$, hoc est facto $p = \frac{1}{2}$ $z = rr$, & $f = -xx$; erunt, manentibus genituris, quilibet exponentes, qui ipsi $z$ & $f$ adhærent, per 2 multiplicandi, (cum $z$ & $f$ per quantitates, quæ numerum binarium pro exponenti habent,

designentur ) adeoque progressio potestatis $Ar^{2p} - Bxxr^{2p-2} + Cx^4r^{2p-4} - Dx^6r^{2p-6}$ – &c. unde posito $p = \frac{1}{2}$ ac ipsis $A$, $B$, $C$, &c. per numeros explicatis fiet, $y = r - \frac{xx}{2r} - \frac{x^4}{8r^3} - \frac{x^6}{16r^5} - \frac{5x^8}{128r^7}$ – &c. hoc est secundum §12 omnia $ye$ $= rx - \frac{x^3}{6r} - \frac{x^5}{40r^3} - \frac{x^7}{112r^5} - \frac{5x^9}{1152r^7}$ – &c. hinc factâ maximâ $x = r$, dabitur totius quadrantis circuli per infinitam hanc seriem dimensio.

*Schol.* Quomodo vero, divisione ac extractione hoc modo institutâ, semper series inveniri possit, quæ omnium $ye$, seu curvilinei dati cujuscunque valorem absolutum comprehendat, modo ipsius $y$ valor per quantitates determinatas ac interceptam $x$ efferri possit, licet cujusvis generis asymmetriis fractionibusque implicitus, eruditissimâ suâ dissertatione prosecutus est *Cl. D. Gregorius*; quo lectorem curiosum remittimus. Neque aliud quid ad absolvendam per infinitas series omnium curvilineorum quadraturam restare videtur, nisi ut ipsa applicata $y$ modo statim recensito possit determinari. Decreveramque huc spectantia nonnulla hisce annectere, nisi, felici omine, cum hæc prælo submittenda essent, me honore præsentiæ suæ dignatus insignis Mathematicus *J. Makreel* anglico idiomate *celeberrimi Newtoni* cogitata circa serierum proprietates in publicum emissa esse asseverasset: quare cum nihil nisi omnibus numeris absolutum è tanti viri lucubrationibus prodeat, meis edendis, ut & demonstrationi §. 21. addendæ supersedi; & nullus dubitans, quin ibi loci profundè tractata reperiantur, ad alia me confero.

Hacte-

Hactenus quidem ea præcipuè curvilineorum symtomata, quæ ex ordinariâ infinitesimarum triga, *e*, *a*, *u*, seu triangulo *DHE* enasci videbantur, discussimus, uti toto hujus capitis decursu tum §. 17, 18, &c. videre est; quoniam vero non hæ tantum in singulis curvis, sed & in quibuslibet præterea lineis subtangentibus, tangentibus, normalibus ac subnormalibus cæterisque innumeris suæ considerari possunt infinitesimæ, (quale specimen Cap. I. §. 78, 79, &c. exhibuimus) nova hic sese pandit, curvilinea transmutandi mensurandique methodus, ac theorematum non exigua multitudo.

24. Sit *Fig: XLII.* curvilineum *ADEP*, vocenturque ut semper *AQ*: $x$, *QD*: $y$, tangens *TD*: $s$, subtangens *TQ*: $t$, normalis *DR*: $k$, subnormalis *QR*: $l$, curva *AD*: $c$; crescet $x$ per respectivam infinitesimam *QP*: $e$; $y$ per *EH*: $a$; $c$ per *DE*: $u$; *AT* seu $t - x = f$ per *BT*: $i$; adeoque *TQ* seu $t$ per *QP* + *BT* seu $e + i$, hinc & illinc; sic & $DT = 9C$ seu $s$ utrinque crescit per infinitesimas 9*E*: $u$, & *BC*: $\lambda$; subnormalis *QR*: $l$, crescit per *RV*: $o$, decrescit per *QP*: $e$, unde $PV = l - e + o$, $BE = s + u + \lambda$, $BP = t + e + i$. Sic & *TC* ac *R* 10, ipsis *BE* & *EV* respectivè normales; sunt infinitesimæ; & *DR* crescit per infinitesimam *V* 10, & sic in cæteris.

Quæ jam hinc succrescant curvilineorum proprietates uno aut altero exemplo declarabo.

25. Sit *P* 2 curva subtangentialis (hoc est cujus applicata *H* 2 curvæ *ADE* subtangenti res-

pectivæ *TQ* seu *t* perpetim adæquatur ) erit $E♀ = BP = t+e+i$, adeoque $w♀ = e+i$; & factâ subtangenti $H\Delta : h$, est $h : t :: a : e+i$; unde $ta = he+hi$, sed $ta = ye$, ergo $ye = he + hi$, quare factis Q 3 = T 8 = H Δ, donec enata sint curvilinea *AZP* & *AFB*, erit hoc = omnia *hi*, illud = omnia *he*, & utriusque summa æqualis curvilineo exposito *AEP* seu omnibus *ye*, unde hoc theorema:

Si in quâlibet curvâ *ADE* ad applicatam *EP* ordinetur curvilineum subtangentiale *P ♃ H*, hujusque inquiratur subtangens *H* Δ; erit expositum curvilineum *AEP* semper æquale duorum curvilineorum summæ *AZP* & *AFB*; quorum hæc est proprietas, ut applicatarum *Q* 3 & *T* 8 singulæ, utrique subtangentis respectivæ *TQ* extremitati insistentes, inventæ curvæ subtangentialis subtangenti H Δ jugiter adæquentur.

N. B. quomodo jam curvæ *ADE* proprietate cognitâ, cæterarum relationes inter applicatas interceptasque constitutæ inveniri possint, cuilibet mediocriter in analysi versato plusquam cognitum est.

26. Sit, *Fig. XLII*, idem curvilineum *APE*, item duo alia *AGP* & *A* 8 *FB*, quorum alterum ad interceptam, $AQ : x$, alterum ad subtangentis abscissam *AT*, $= t - x = f$, ordinatum est; sintque in utroque respectivæ applicatæ Q 4

&

& *T* 8 semper æquales $=h$; tandem subtangens primi *QI* applicetur in *T*, 12, ad secundi interceptam *AT*; item subtangens secundi *TO* ad primi interceptam *A* Q in Q 5, donec exorta sint duo nova curvilinea *A*, 12, *F*, *B*, & *ATP*. Dico hæc ultima sibi mutuo perpetim æquari.

Vocatis enim *TO*: $n$; & Q*I*: $m$; sit 14, *G*, $=$ 13, *F*, $=\mu$; quæ est infinitesima, quâ $h$ in utroq curvilineo crescit: erit; $n:h::i:\mu$; tum: $m:h::e:\mu$; unde emerget $mi=ne$, est autem ex hypothesi area *A*, 12, F *B* $=$ Omn. $mi$ & spatium *ATP* $=$ omn. $ne$; unde constat propositum.

27. Notari potest, si fiat $h=t=T$Q, fore perpetuò $m+n=t$; hoc enim casu fiet $\mu=e+i$; adeoq. $n:t::i:e+i$; tum $m:t::e:e+i$; unde, explosis ex æquationum lege infinitesimis, effati veritas elucescet.

28. Sit idem curvilineum *APE*, item aliud ad eundem axem positum, *AGP*; cujus hæc est proprietas, ut Q4 jugiter adæquetur prioris subnormali *QR*: $l$; hujus indagetur subtangens *QI*: $m$; erit *G*, 14, $=o-e$; adeoque $m:l::e:o-e$; unde $me+le=mo$, quare facto 4, 5, $=m$, erit Q5 $=m+l$; adeoque quadrilineum *A*, 20, *T P*, seu omnia $me+le$ æquabuntur quadrilineo, 30, 15, 17, *V*; cujus hæc est natura, ut ad singulas normalis *DR* ac axis *AR* intersectiones *R* & *V*, &c. elevata perpendicularis *R*, 16,

æquetur inventæ subtangenti : Q *I* ; quamobrem quadrilineum, 30, 15, 17, *V* = omnia *mo*; demonstratio patet, curvarumque omnium relationes ex curva *APE* proprietate cognitâ manifestæ sunt.

29. Quod hic circa infinitesimas *BT*, *i*, & *RV*, *o*, præstitum est, eodem modo circa cætera, verbi gr: *u* & *λ* seu *DE* & *BC* obtinet; factisque 6, *C*, & 7,9, = *h*; erit spatium *MNB*, omnia = *hλ*; & *WXE* = omnia *hu*; sed de his in specie alibi latius; cum punctum *N*, determinatum per intersectionem curvæ *AKN* & tangentis B *E*, ipsam tangentem dirimat in duas partes; quarum prior NE æquatur curvæ *ADE* = *c*, unde *N*B = *s* − *c*; suffecerit hic modum indicasse, quo innumeri generis curvilinea transmutantur.

30. Quomodo vero hinc multa curvilineorum spatia ad notam redigantur mensuram, ex methodo §. 17. adhibitâ innotescet. factâ enim quâlibet hypothesi *he* = *zi*, erit factâ Q3 = *h*, & *T*, 12, = *z*, spatium *AZP* = omnia *he*, & *BF*, 12, *A* = omnia *zi*: sumtâque *h* ad curvilineum quadrabile, erit & ipsa *z* ad curvilineum notum.

Quopacto autem ex datâ *h* inveniatur *z*, sequentia manifestant. Cum hic infinitesimæ *e* & *i* sint adhibitæ, notum est eas constituere subtangentis *T*Q incrementum, quare describatur alia curva *A*4*G*, in qua semper Q4 = *T*Q = *t*, erit

erit $G$, $14 = e+i$, vocatâque hujus subtangenti $QI = n$, fiet $n : t :: e : e + i$, unde $\frac{te - ne}{n} = i = \frac{be}{z}$ adeoque $z = \frac{bn}{t-n}$, hinc, datâ curvâ $ADE$, datur $z$ seu curvilinei $BFA$ relatio.

31. Sic & assumtis quibuslibet hypothesibus, per quaslibet infinitesimas designatis, ultima indeterminatarum post rejectas infinitesimas (cæteris ex arbitrio ad quaslibet curvas determinatis) innotescet.

Verb: Gr: fiat $be + do = zi + g\lambda$, quomodo hinc infinitesimæ ejiciantur, sequenti paradigmate patebit. In genere, si $e$ in supposita æquatione reperiatur, illa ad curvam $ADE$ pertinens linea, quæ per infinitesimam, quam ejicere conamur, crescit, ad eundem axem $AP$ applicetur; curvæque hinc enatæ subtangens reperiatur, habebiturque æquatio, qua expositam infinitesimam tollere poterimus.

Sic I. ad ipsam $o$ tollendam, cum subnormalem spectet, juxta §. 24. fiat curvilineum $AGP$ tale, ut $Q\,4$ æquetur ipsi $QR$, erit $G\,14, = o - e$; adeoque vocatâ subtangenti $QI = b$, est $b : l :: e : o - e$, unde $o = \frac{le + be}{b}$

II. ad $i$ tollendam, cum spectet subtangentem $t$, concipiatur eadem $Q\,4$ esse $= TQ = t$, ejusque subtangens $QI = n$, erit $n : t :: e : e + i$,

unde

unde $i = \frac{te - ne}{n}$.

III. Ad tollendam $\lambda$, cum hæc tangentem spectet, sit $Q4 = s$, $QI = m$, erit $m : s :: e : u + \lambda$, seu $mu + m\lambda = se$; sed ex ordinariâ curvarum proprietate est $tu = se$, cujus ope sublata $u$ ex modo inventa æquatione, erit $\lambda = \frac{tse - mse}{tm}$. qui tandem valores in ipsorum $o$, $i$, $\lambda$, locum repositi, ac divisione per ultimam $e$ institutâ, hanc æquationem reliquam faciunt:

$$b + \frac{dl + db}{b} = \frac{zt - zn}{n} + \frac{gst - gsm}{tm}$$

Unde, tribus ex $h$, $d$, $z$, $g$, pro arbitrio assumtis, ultima manifestatur.

*Schol.* Notetur, cum ad singulas lineas, quæ pro vario ad curvas respectu ac positione magnitudinem variant, singulæ pertineant infinitesimæ, quibus vel ab unâ vel ab utrâque sui extremitate augentur aut minuuntur; ac nulla sit curva, ad quam infinitæ, saltem pro lubitu multæ, tales indeterminatæ multis modis referri non valeant; quarum singulæ in quamlibet infinitesimam ductæ, si infinities sumantur, curvilineum aliquod efformabunt; hoc ipso methodus patet ac ratio, transmutationes ac spatiorum quadraturas plurimis modis tentandi; qui hactenus, ni fallimur, ferme intacti Mathematicis remanserunt. Exempla quilibet ac theoremata proprio marte, ad præcedentium normam, sibi cudet; unicum hoc addam in minus exercitatorum gratiam; ut pateat infinitesimarum curvilineorumq: hinc ortum ducentium numerum ac varietatem, si velimus, in singulis curvis nullo limite coerceri.

32. Repetitis *Fig. XXII.* ac Cap. I. §. 78 symbolis; in axe $AQ$ producto assumatur punctum aliquod fixum $W$, unde ad prolongatas tangentes $EB\,3$, $ET\,5$, ducantur perpendiculares $W3$, $W5$, appellatisque $AW: r$, $W5: k$, erit $WT = r + x - t$; tum & 4, 5, erit infinitesima quæ vocetur: $\mu$, unde $W3 = k - \mu = W4$, juxta lemma 36; & ex hypoth. angulus $E, 3, W$, est rectus, quare triangula $W3B$, & $EPB$ sunt similia, ideoq. $r + x - t - i : k - \mu :: s + u + \lambda : y + a$, unde $ra - xa - ta - yi = ku - s\mu + k\lambda$, quibus rectangulis, tanquam curvilineorum indicibus, infinities sumtis, juxta infinitesimarum $\mu$ & $i$ multitudinem; hinc & inde nascetur æqualis curvilineorum summa; nec schemata nec demonstrationem addo, cum mox prægressa intelligenti hæc obscura esse nequeant. Hoc adjungo, puncta 3 & 5, esse ad novam hinc generatam curvam 6, 3, 5, 7; cujus relatio ad axem $WA$, si opus sit, exhiberi potest, mediante normali in eundem demissâ; rectula 3, 4, est infinitesima, & triangula $W$, 3, 4, & $E$, 4, 5, sunt similia, unde alia denuo propullulant.

Sic resumtis Cap. I. §. 101, ob magnam illic indeterminatarum, infinitesimarumque copiam, nulla fere ibi loci reperitur æquatio, quæ variorum curvilineorum multifariam æqualitatem aliaque symtomata non inferat: verum hæc sufficiant.

33. Quo-

33. Quoniam vero in trapezia non solum, sed & plurimum in triangula, idque variis modis, quæ mensuranda præ manibus sunt, polygona dispescere solent Geometræ; sit *Fig. XLI.* Curva *ADEF*, ejusq. tangens *TDE*, cui normalis est *AR*; dividaturq. Curvilineum *ADEFO* (quod juxta Lem. 26, & 27 cum polygono coincidit) ex puncto *A* in triangula *ADE*, *AEF* & similia; ac cæteris vocatis; ut sæpius, dicatur *AR*: $n$, erit *TA*: *AR*:: *DE*: *EH*; seu $t-x$: $n$:: $u$: $a$; quare $ta-xa = nu$; hoc est posito *TA* in *IM*, figura *FKO* seu omnia $ta-xa$ æqualis duplo bilinei *ADEF*, quod constat totidem triangulis *ADE* seu $\frac{nu}{2}$ hoc est $\frac{AR \text{ in } DE}{2}$.

*Coroll.* sit, *ADE*, paraboloides, cujus æquatio $r^{\frac{p-q}{q}} x^{\frac{q}{p}} = y$, erit $t = \frac{p}{q}x$ adeoque $ta - xa = \frac{pxa - qxa}{q}$; sunt autem omnia $xa$ æqualia complemento parabolico *SAF*, quod vocetur $f$, ergo $\frac{pf - qf}{q}$ æquale duplo bilinei *ADE*; quare $\frac{xy}{2} - \frac{pf + qf}{2q} = f$, seu triangulum *SAF* minus bilineo *ADEF* æquale trilineo *SADF*: unde reductâ æquatione $\frac{qxy}{p+q} = f$. uti supra jam aliquoties inventum.

34. Sit

34. Sit eadem *Fig. XLI.* multangula seu curvilinea A*DEFO*, ducaturque *NE* curvam in F tangens; ut spatii AF*O* magnitudo indagetur, dividatur trilineum *N*F*Z*A in triangula *D*B*T*, ac similia; cujus alterum latus *DT* infinitesimæ *ED* in directum jaceat, alterum B*D* sit in infinitesimâ *ZD* productâ & sic in cæteris; vocatisque BT infinitesima $i$, ac $EP:y+a$, positâ *D*Q $=y$, erit triangulum B*DT* $=\frac{yi}{2}$, adeoque trilineum *N*F*Z*A æquale omn. $\frac{yi}{2}$: fiat jam $yi=ze$, factoque Q2 $=z$, erit spatium A4*O* seu omnia $ze$ æquale duplo trilinei *N*AF seu omn. $\frac{2yi}{2}$; cum autem hic sit $y:z::e:i$ & posito $YI=h$, ac $IM=t$ juxta §. 79. Cap. I. $h:y-h::e:i$, erit $z=\frac{yy-hy}{h}$.

*Coroll.* Unde posita *AE*F ad idem cum præcedenti paraboloïdes, erit juxta tangentium methodum *YI* seu $h=\frac{qy}{p}$, quare $z=\frac{py-qy}{q}$; & omnia $ze$ seu *A*4*O* seu $\frac{pye-qye}{q}$ ad paraboloïdes *A*F*O* seu omnia $ye$ ut $p-q$ ad $q$, sed spatium *A*4*O* æquale ex præcedenti duplo trilineo *NA*F, ergo duplum trilinei *AN*F

ad

ad parabolam *AFO* triangulum *NFO* complentem ut $p-q$ ad $q$, unde rursus paraboloideôn quadratura innotescit.

35. Si vero quis aliam curvilineorum in triangula divisionem expetat, assumto *Fig. XLIII & XLIV.* in axe *AP* puncto quolibet B, ducatur ex eo tangenti *DE* productæ normalis B*R*, quæ vocetur $z$, ac BT: $h$, & porro ex puncto B curvilineo B*ED*A diviso in triangula B*DE* &c. æquabunt hæc triangula ipsum curvilineum; & propter triangulorum T*D*Q & TB*R* similitudinem T*D*:*D*Q::BT:B*R*::*DE*:*EH*, seu $s:y::h:z::u:a$. unde $zu = ha$, factâque *M*B ipsi *D*Q parallelâ, ac sumtâ in eâ B*C* = *D*Q = $y$, & *GC* = *EH* = $a$, cui in *C* normaliter insistat *CL*: $h$, idque toties, donec per extremitates ipsorum $h$ seu puncta *K*, *L*, &c. describi queat curva *NKL*A, erit spatium *NM*BA æquale omn. $ha$, quod æquatur totidem $zu$, seu rectangulis ex B*R* in *DE*; jam B*R* in *DE*, est duplum trianguli B*ED*, per elementa: quæ triangula complent trilineum mixtum A*DE*B, quod proinde = omn. $\frac{zu}{2}$, quare omnia $ha$ seu spatium *NM*BA æquatur duplo trilinei *ADE*B seu omn. $\frac{2zu}{2}$ unde variæ denuo curvilineorum transmutationes.

*Coroll.*

*Coroll.* Positis enim, *Fig. XLIII*, *BQ*: $x$, *QD*: $y$, sit æquatio curvæ *ADE* ad hyperbolam $rr + yy = \frac{l}{q} xx$; erit juxta tangentium methodum *BT* seu $CL = h = \frac{qrr}{lx}$, quæ æquatio expressa per $y$, cum *CL* ad $y$ seu *CB* ordinetur, erit $h = \frac{rr\sqrt{\frac{q}{l}}}{\sqrt{rr+yy}}$ curvæ *NLA* relationem designans æquatio; estq. hoc in casu curvilineum B*GKA* æquale trilineo hyperbolico B*EDA*.

36. Sponte hinc nascentem observationis loco Conchöidum dimensionem adjicere liceat.

Sit *Fig. XLV*. Polo *M*, vertice *A*, normâ *D*Q, descripta Conchois *A*B*C*; vocenturque $AD = QB: r$, $DM: s$, $GD: f$, $GB: x$, erit radio *AD* seu $r$ descripto quadrante circuli *AHJ*, appellatâque $HG: y$, conchoidis proprietas, $x = \frac{sy}{f} + y$; &, positâ $\frac{sy}{f} = z = GN$. ad curvam *ANR*, $z + y = x$. Unde trilineum *AGN* seu omnia $ze$, una cum trilineo *AHG* seu omnib. $ye$ æquatur omnib. $xe$ seu spatio conchoidali *AG*B.

Jam autem, cum omnia $ye$ sint ad quadrantem circuli, inveniendum restat trilineum *AGN* seu omnia $ze$, quem in finem sumtâ *NP* seu $f$ pro applicatâ, & *DP* seu $z$ pro interceptâ,

 erit

erit (cum sit $\frac{fy}{f} = z$, & $yy = rr - ff$) $f = \frac{rs}{\sqrt{ss + zz}}$ æquatio curvæ *A N R* relationem ad axem *D P* manifestans, huic autem curvilineo *A D P N* per præcedens corollarium, æquale fuit inventum trilineum hyperbolicum; quæ ut hinc casui approprientur, erat $h = \frac{rr\sqrt{\frac{q}{l}}}{\sqrt{rr + yy}}$ in Coroll. præmisso, hic vero $f = \frac{rs}{\sqrt{ss + zz}}$. fiat ergo terminorum comparatio, & collatis denominatoribus erit $f = r$ & $z = y$, ex numeratoribus autem emergit: $\frac{q}{l} = \frac{rr}{ff}$; quare loco æquationis hyperbolicæ $rr + yy = \frac{l}{q}xx$, si loco $x$ sumatur $k$, orietur hoc in casu hæc, quæ sequitur, $ff + zz = \frac{ff}{rr}kk$, hyperbolam spectans, cujus latus transversum $= 2r$, rectum $= \frac{2ff}{r}$. ad cujus constructionem, quadrilineo *A D P N* circa *D P* revoluto in *S D P T*, latere recto $\frac{2ff}{r}$ & transverso *A S* seu $2r$, describatur hyperbola modo inventa *S F*, secans productam *N P* in *F*, erit ductâ rectâ *D F*, mixtilineum

*A D N P*

*ADNP* seu *DSTP*, duplum trilinei hyperbolici *SDF*.

Ergo spatium *AGN* æquale duplo trilineo *SDF*; demto rectangulo *GDPN*; cui spatio *AGN* jam invento si addatur spatium *ANB*, seu illi æquale segmentum circulare *AHG*, ex modo datis emergit spatium conchôidale *AGB* æquale duplo trilineo hyperbolico *SD* F, una cum segmento circulari *AGH*, demto rectangulo *GDPN*.

§. 37. Repetantur symbola §. 24. assumta, ac schema XLII. oportet curvilineum *AZP* describere, quod æquale est rectilineo cuicunque inter quaslibet rectas, curvam *ADE* spectantes, efformato.

Dicatur curvilinei quæsiti applicata Q 3 : *h*, erit *AZP* = omnia *he*; jam quæritur *h*, si

I. Sint omnia $he = \frac{yy}{2}$; seu area *AQ*3 = semiquadrato in QD. Hæc & sequentia ex §. 13. solutionem admittunt. fiat enim *he* semper æquale terminorum infinitesimalium summæ ex rectilineo dato, seu hoc in casu ex $\frac{yy}{2}$ ortum ducentium, erit $he = ya$; adeoque juxta §. 13. tradita, omnia $he$ = omn: $ya = \frac{yy}{2}$, jam per æquationes ex curva *ADE* conquisitas eliminentur

 in-

infinitesimæ $e$, & $a$; habebiturque, cum sit $he = ya$, & $ye = ta$, amotis infinitesimis, $h = \frac{yy}{t} = l = QR = Q3$.

II. Sint omnia $he = ry =$ rectangulo ex $r$ determinatâ in $DQ$, erit $ra$ terminus infinitesimalis ex $ry$ oriundus, & facto $he = ra$, erit $ry =$ omnia $he =$ omnia $ra$, ex §. 13. adeoque cum sit $ye = ta$, fiet $h = \frac{ry}{t}$.

III. Sint omnia $he = xy =$ rectangulo ex $AQ$ in $QD$, erit juxta *Schol.* §. 13. $xa + ye$ terminorum infinitesimalium ex $xy$ nascentium summa; hæc fiat $= he$, erit $xy =$ omn. $he =$ omn. $xa + ye$ ex §. 13. & elisis infinitesimis per æquationem: $ye = ta$, fiet $h = \frac{xy + ty}{t}$.

IV. Sint omnia $he = ty =$ rectangulo ex $QT$ in $QD$. erunt, juxta §. 24. ipsius $t$ respectivæ infinitesimæ $= e + i$; adeoque termini infinitesimales per *Schol.* §. 13. hinc prodeuntes $ye + yi + ta$, quibus factis $= he$, erit $ty =$ omn. $he =$ omn. $ye + yi + ta$ ex §. 13; unde ex hac æquatione $he = ye + yi + ta$ hoc modo ejiciantur infinitesimæ, primo, est $ta = ye$, quare $he = 2ye + yi$; secundo, ut tollatur $i$, cum hæc pertineat ad subtangentem $TQ$ seu $t$, fiat $AGP$ curvilineum subtangentiale, in quo semper,

per, $Q4 = QT$, erit $G, 14, = e+i$, & vocatâ hujus subtangenti $QI = n$, est $ne+ni = te$, ex quâ cum priori combinatâ emergit $h = \frac{ty+ny}{n}$.

V. Rursum sint omnia $he = rt =$ rectangulo ex $r$ determinata in $QT$, erit juxta modo memorata $he = re+ri$, tum $ne+ni = te$, adeoque $h = \frac{rt}{n}$.

VI. Sint Omnia $he = \int t =$ rectangulo ex $TD$ in $QT$. erunt, juxta §. 24, $u+\lambda$ ipsius $\int$, ac $e+i$ ipsius $t$ infinitesimæ; adeoque infinitesimales termini ex $\int t$ oriundi, juxta §. 13. Schol. $tu+t\lambda+\int e+\int i$; qui si fiant $= he$, erunt omnia $he =$ omnia $tu+t\lambda+\int e+\int i = ts$ ex §. 13 ...; quomodo jam hinc infinitesimæ tollendæ sint, ut ipsius $h$ valor inveniatur, jam §. 31. in genere ostensum est; & exemplis præcedentibus ritè intellectis satis liquido apparet.

§. 38. Hoc notetur, necessario non requiri, ut $h$ seu $Q3$ perpetuo ad $AQ$ applicetur; unde curvilineum $AZP$ per omnia $he$ explicatur, seu per $h$ & infinitesimam $e$, qua $AQ$ seu $x$ crescit, verum & ad alias quascunque rectas ipsam $h$ ordinari posse.

Sit enim $T, 8, = h$, erit curvilineum $BFA =$ omnia $hi$; sit hoc æquale ipsi $xy$ seu omnibus $xa+ye$, adeoque cum sit $xa+ye =$

 $hi$,

$hi$, tum $ta = ye$, & juxta §. præc. Ex. IV. $ne + ni = te$, ejectis infinitesimis fiet $h = \frac{nxy + nty}{tt - tn}$.

Nec ulteriori discursu adstruere opus videtur, posse $h$ ad quaslibet rectas quibuslibet infinitesimis crescentes applicari; modo infinitesimarum eliminatio, juxta ea quæ in §. præc. tum & §. 31. tradidimus, legitime adhibeatur: sic enim $ty$ poterit supponi = omnia $he$ in curvilineo $AZP$; tum = omnia $ha$ in curvilineo $AP\Omega$, item = omnia $hi$ in curvilineo $AFB$; nec non = omn. $ho$ in curvilineo 30, 15, 17, $V$. & sic infinitis modis.

§. 39. Neque semper necessarium est, ut rectilineum, cui alia figura curvilinea æqualis quæritur, sit inter rectas ad curvam $ADÆ$ spectantes constitutum; quinimo generaliter solvi potest problema, ac inveniri relatio, quam habet applicata Q3 ad interceptam $A$Q, si curvilinei $A$Q3 area semper sit æqualis rectangulo quarumcunque applicatarum Q4 & Q5. factis enim Q4 $= f$, & Q5 $= z$, subtangentibusque, Q$I = b$; Q, 18, $= d$, ac infinitesimis, $G$, 14, $= \theta$, & $\Upsilon$, 19, $= \mu$:

Cum ex hypothesi sint omnia $he = fz$; erunt $f\mu + z\theta$ termini infinitesimales ex rectangulo $fz$ oriundi, qui si fiant $= he$, erunt omnia $he =$

om-

omnia $f\mu$ + omnia $z\theta = fz$ ex §. 13. jam ex curvilineorum $AGP$, $ATP$ naturâ est $\theta = \frac{fe}{b}$ item $\mu = \frac{ze}{d}$, unde suffectis in æquatione $he = z\theta + f\mu$ inventis valoribus erit $h = \frac{fz}{b} + \frac{fz}{d}$; quare $fz$ rectangulo per $x$ interceptam expresso etiam $h$ per eandem $x$ exprimetur.

Ex. Gr. sit $fz = \sqrt{rrxx + rx^3}$, fiatque $f = x$, & $z = \sqrt{rr + rx}$, erit $b = x$, & $d = 2r + 2x$; unde ablatâ asymmetriâ emerget curvilinei $AZP$ relationem designans æquatio, $4r^3 + 12rrx + 9rxx = 4rhh + 4xhh$.

§. 40. Quod si $f$ & $z$, quolibet modo, hoc est in relatione ad quaslibet lineas tum rectas, tum curvas, exprimantur, tamen $h$ determinabitur; modo subtangentes $b$ & $d$ cognitæ sint, uti patet.

§. 41. Animadversu dignum videtur, si curvilineum quæsitum per omnia $he$ designetur, hoc est si Q3 seu $h$ ad $AQ$ seu $x$ tanquam interceptam ordinata fuerit, ipsius $h$ valorem jugiter adæquari subnormali $QV$ curvæ $A$, 23, $P$; cujus hæc est proprietas, ut existente ipsius applicatâ Q, 22, $= g$, sit perpetuo $fz = \frac{gg}{2}$, vocatâ enim hujus subtangenti Q, 21, $= m$, & subnormali $QV$: $q$, cæteris ut

 supra

supra manentibus, erit juxta Cap. 1, §. 35. æquatio ad tangentem $fzbm + fzdm = ggbd$: quare $\frac{fz}{b} + \frac{fz}{d} = h = \frac{gg}{m} = q$ ex proprietate trianguli rectanguli, 21, 22, V.

Possent hinc omnia exempla §. 37. exhibita deduci; si enim fiat, $f = t$, & $z = y$, erit $b = n$, & $d = t$, adeoque $h = \frac{ty}{n} + y = q$, ut in exemplo tertio.

*Schol.* quod, si quis hinc conversum meditetur; & ex data $h$ seu Q3 velit inquirere curvilinei *AQ3* magnitudinem; patet ex præcedenti totum hoc negotium ad probl. §. 95. Cap. I. propositum referri, nempe ad inventionem curvæ *A*, 23, *P*, cujus subnormalis *QV* sit data $= h$; de quo alibi latius actum est. Interim licet §. 37. & 39. exhibita exempla varios videantur innuere modos, quibus idem, à posteriori vestigia relegendo, obtineri possit; ex §. 41. tamen satis est manifestum, totam hanc, quæ primò sese offerre videtur, principiorum varietatem in unicum hoc, quod modo proposuimus, desinere.

Quænam etiam sit eorum, quæ §. 38. tradidimus, cum modo recensitis differentia, adhibito calculo generaliori ad methodum §. præcedentis, elucescet.

Possent & hic relationes curvilinei mensurabilis AQ3, naturali quodam ordine disponi; a simplicioribus ad magis composita progrediendo, plurimorumq. adeo curvilineorum mensuræ tradi, ex variis ipsius $g$ seu Q, 22, ad AQ, relationum hyphothesibus oriundæ; at quorsum? cum non nisi generaliter soluto sæpius insinuato subnormalium problemate, desideratum obtineri queat.

§. 42. Sit, *Fig. XXXIV.* $AQ = ND : x$,

$QD = TM : y$, $QT = DM : t$; $QP : e$, $VT : i$; erit area $AEP =$ omn: $ye$, hujus quæritur mensura. I, cum $e$ sit infinitesima ad $AQ$ seu $x$ referenda, hoc in ipsius locum reposito habebitur: $yx$, cujus termini infinitesimales $ye + xa$; & juxta §. 13, omnia $ye +$ omn. $xa = yx$; unde patet cognitis omnib. $xa$, cognosci omn. $ye$: est autem $xa$ ad dati spatii complementum $KEA$, uti notum.

II. Cum infinitesima $e$ spectet simul subtangentem, $TQ$ seu $t$, emerget, $t$ ipsi $e$ surrogato, $yt$; cujus infinitesimales $ye + yi + ta$, seu $2ye + yi$; & per §. 13, omn. $2ye +$ omn. $yi = yt$; unde inventis omnibus $yi$, nota erunt omnia $ye$; jam $yi$ esse ad curvilineum $LVA$ nemo ignorat. Hæc autem methodi gratiâ.

*Schol.* ut vero pateat, non semper tangentium inventionem aut subnormalinm ad mensuras curvilineorum necessariam esse; verum & solam æquationis curvæ ad infinitesimas redactionem sæpenumero levi operâ pandere, quæ, non nisi intricatiori calculo, per tangentium methodum inquirere moris est, sequentia subjungo.

§. 43. Sit, in *Fig.* XXXIX, $AQ = x$, $QD : y$, infinitesimæ $DH : e$, $EH : a$, & curvæ æquatio ad quamlibet paraboliformem $r^{p-q} x^q = y^p$; erit hæc æquatio ad infinitesimas redacta, ac in $yx$ ducta $q r^{p-q} x^q y e = p y^p x a$, quæ per æquationem datam divisa dabit $qye = pxa$; quocirca juxta lemm 43, $p : q ::$ om-

nia $xa$ ad omn. $ye$, hoc est ita complementum $AFV$ ad paroboloidem $AFO$. Unde eadem, quæ §. 11. ostensa sunt, deduci possent absq. tangentium auxilio.

§. 44. Sit *Fig. XIII. N.* 1. eademque, quæ §. 31. Cap. I. symbola; adeoque cissöidis $AKG$ æquatio $xx = yz$, seu $x^3 = rzz - xzz$; erit ea ad infinitesimas redacta, juxta *Schol.* §. 13, $3xxe = 2rzo - 2xzo - zze$; quæ divisa per $z$, ac loco $\frac{xx}{z}$ posito $y$ juxta hypothesin, tum & $l$ ipsi $r - x$ substituto abibit in hanc. $3ye = 2lo - ze$.

Jam vocato cissoidali integro spatio $= k$, semicirculo integro $= c$, cum omnia $lo$ sint $=$ omnia $ze$, (si utrumque aream cissöidis infinitam designet) erit $3c = 2k - k = k$ seu Cissöis semicirculi tripla.

Hoc notetur; si tum omnia $lo$, tum omnia $ze$, non ad infinitum cissôidis spatium, sed ad partes ejus respectivas referantur, fore $AKP$ $=$ omnia $ze$ (hoc dicatur: $f$) tum $AKMO$ $=$ omnia $lo$ (hoc appelletur: $p + f$, vocato scilicet rectangulo $PKMO$: $p$) ac omnia $ye =$ $APE$. (hoc fiat $= d$) quare cum sit ex superioribus omn. $3ye =$ omn. $2lo -$ omn. $ze$, erit $3d = 2p + 2f - f$, seu $3d - f = 2p$, hoc est triplum portionis circularis $APE$, detractâ res-

respectivâ Cissoidali portione $AKP$, erit æquale bis sumto rectangulo $PKMO$ seu $AP$ in $PE$: est enim ex naturâ Cissoidis $rz-xz = xy$.

Tum & alia ratione ex æquatione inventa $3d-f=2p$ totius Cissoidis ad circulum ratio cognoscitur; est enim rectangulum $PKMO = p = rz-xz$; unde facto $x=r$, seu $AQ = AO$, pertinebit ipsa $f$ ad integram Cissoidem, ac $d$ ad totum semicriculum, & $p$ evadet æqualis nihilo; quare $3d-f=0$, & $f=3d$, seu cissois ad semicirculum ut 3 ad 1. similia hic possent circa cissoidem ex hyperbola genitam aliasque curvas adjungi.

§. 45. Sit Conchöis $ABC$ *Fig. XLV*, vertice $A$, normâ $DQ$ ac polo $M$ descripta; vocenturq. $AG: x$, $GB: z$, $GD: f$, $GM: l$, $AD: r$, $DM: p$, tum radio $AD$ ducto circuli quadrante $ADI$, appelletur $HG: y$, tandem dicantur infinitesimæ, $G2: e$, $4, 5: a$; $W3: o$.

Notum est æquationem conchöidis proprietatem exprimentem esse $ly=fz$, hæc redacta ad terminos infinitesimales dabit $fo-ze = la-ye$, quæ, si ducatur in $l$, ac loco $ly$ ponatur $fz$, exhibebit $flo-lla=lze-fze$; unde (cum sit $l-f=p$, ac ex naturâ conchoidis $l:z::f:y$.) omnibus per $f$ divisis fiet $fo-la$

$= p$

$= \frac{pye}{f} = \frac{prye}{fr}$ : jam vero si $\frac{ry}{f}$ seu tangens *A 7* vocetur $n$, ipsiq. jugiter æqualis assumatur *G N*, donec exorta fuerit curva nova *A N R*, erit $fo = la + \frac{pne}{r}$; & sumtis omnibus infinities, omnia $fo$ seu spat: *A W V D* æquantur omnib. $la$ seu spatio 5 *Z M A*, una cum spatio *A*, 2, 8, seu omnib $ne$ ducto in $\frac{p}{r}$.

Unde rursum conchoïdis ad alîus generis curvilinea ratio innotescit.

§. 46. Sit, *Fig. XXXIX.* radius $AO:r$, & *AD* arcus circuli, $AQ:x$, $QD:y$, *AC* portio Cissoidis cujus applicata $QC: \frac{xx}{y} = z$; tum *AB* pars curvæ, cujus applicata $QB: \frac{rx}{y} = k$; quæritur Areæ *ABQ* ratio ad semicirculum; seu omnium $ke$ ad omnia $ye$. æquatio semicirculi est: $2rx - xx = yy$, quæ redacta ad infinitesimas dabit, $re - xe = ya$, & ducta in $x$ ac divisa per $y$ exhibebit. $\frac{rxe}{y} - \frac{xxe}{y} = xa$, seu $ke - ze = xa$; & vocatis omnib. $ke$ seu $ABQ: d$, tum omnib. $ze$ seu $ACQ: f$, ac omnib. $xa$ seu complemento portionis circularis $ADX: b$, est $f = d - b = 3c - 2p$ ex §. 44. (facto nimirum segmento semicirculi $ADQ: = c$, & rec-

& rectangulo $xy = 2rz - xz = p$) unde $d = 3c + b - 2p$, & cum sit $b + c = p$, tandem $d = 2c - p$.

Notetur, si sit $x = 2r$ fore $p = 0$, adeoque $d = 2c$, hoc est totum curvilineum $d$, cujus applicata: $\frac{rx}{y}$, æquatur duplo totius semicirculi, seu $2c$.

Hujus curvilinei aream §. 16. *Coroll. III.* alio modo in ratione ad circulum tangentium ope dimensi sumus.

§. 47. Quinimo & brevius sic efficitur, divisâ circuli æquatione $2rx - xx = yy$ per $y$, ductisq. omnibus in $e$, fiet: $\frac{2rxe}{y} - \frac{xxe}{y} = ye$; seu sumendo symbola præcedentis $2d - f = c$; & cum æquationem ad integra curvilinea determinando sit juxta §. 44. $f = 3c$, erit $d = 2c$, ut supra.

§. 48. Stantibus iisdem, quæritur curvilinei $AB Q$, cujus applicata $QB = \frac{rr}{y}$, ratio ad circulum.

Æquatio semicirculi infinitesimalis $re - xe = ya$, ducta in $r$, ac divisa per $y$, dabit $\frac{rre}{y} - \frac{rxe}{y} = ra$; fiant omnia $\frac{rre}{y}$ seu $ABQ = q$, omnia $\frac{rxe}{y}$ seu $AQC = d$, omnia $ra = AX$

IO

$IO = ry = n$, erit $q - n = d = 2c - p$, juxta §. 46, adeoque, $q = 2c - p + n$.

Et æquationem ad integra curvilinea extendendo, erit $x = 2r$, & hinc tum $p$ tum $n$ nihilo æqualia; unde tandem: $q = 2c$, seu integrum hoc curvilineum est semicirculi duplum; quod §. 16. *Coroll. III.* tum & §. 15, alio pacto per tangentes evictum est.

§. 49. Quomodo vero hæc omnia in §. 10. modum curvis ad punctum Q relatis applicari queant, levi opera explicabo; cum enim sit Fig. XLVI. continuo $TD: s, DQ, y :: DE, u : EH: a$, erit semper $sa = yu$; unde radiis, $DQ$ & $EQ$ ductis arcubus $DI$, $EG$, erit $IG = a$; positâque $TD$ seu $s$, in $IM$, erit Figura $QFK$ seu omnia $sa$ æqualis Figuræ $q\kappa\kappa\varphi\varphi$ seu omnibus $yu$, Fig. XLVII. in qua Fig. $q\varphi\varphi$ recta $q\varphi$ supposita est æqualis curvæ expositæ $QDEF$, ita ut $DE$ sit æqualis $\delta\varepsilon$ seu $u$, ac applicatæ $\delta\kappa$, $\varepsilon\kappa$, sunt æquales rectis $DQ$, $EQ$ seu $y$.

Quoniam vero tot continentur in rectâ $QF$ infinitesimæ ut $IG = HE$ seu $a$, quot in Curvâ $QDEF$ infinitesimæ $DE$; vel, quod eodem redit, quot in recta $q\varphi$ (quæ cnm curvâ $QDF$ eadem esse supponitur) infinitesimæ $\delta\varepsilon$ seu $u$, vocatis $\delta\kappa: z$, & $IM: h$, factoque semper $ha = zu$, Figura $QFR$ seu omnia $ha$, æqualis erit spatio $q\varphi\varphi$ seu totidem $zu$.

Quare

Quare positâ $z$ vel $h$ ad locum quemlibet, altera $h$ vel $z$ innotescet; nam quia $ha = zu$, est. $a : u :: z : h :: y : s$, unde $hy = zs$, & $h = \frac{zs}{y}$.

Cum vero quidem æquemulta sint $DH$ seu $e$, quam $HE$ seu $a$, ac $DE$ seu $u$; sed infinitesimæ $DH$ tam commodè in rectam projici nequeant, ac in Figuris ad axem relatis; descriptâ Curvâ secundâ $QSNO$ ad idem punctum Q relatâ, productisque QD in $S$, & QE in $N$, fiat Q$S$ seu Q$R = z$, & arculus infinitesimus $RS$ dicatur $i$, erit juxta §. 10, spatium Q$SNO =$ omnia $\frac{zi}{2}$; facto jam $zi = ha$, ipsa $IM$ dicatur $h$; eritque spatium $QKF$ seu omnia $ha$ æquale duplo spatii $QSNO$ seu omnium $\frac{zi}{2}$, nam $ha = \frac{2zi}{2}$. quare positâ alterutrâ $h$ ad locum quemlibet innotescit $z$, cum enim sit $QD, y : DH, e :: QS, z : SR, i$. ob arculos $DH$ & $SR$ parallelos, erit. $e = \frac{iy}{z} = \frac{at}{y}$, hinc $\frac{atz}{yy} = i = \frac{ha}{z}$, qnare $tzz = hyy$. unde data $h$ noscitur $z$ & contra.

Simili modo, posito $zi = hu$, factâque rectâ $q\varphi$ æquali curvæ $QDEF$, ac $h = DE$,

*DE*, = *u*, item $\delta x = h$, erit spatium $q\phi\varphi$ seu omnia *h u* æquale duplo spatio QS*O*, seu $\frac{2zi}{2}$; quare *z* vel *h* pro arbitrio positâ, quæ restat hoc modo determinatur, est enim, *TD*, *s*.: *DE*, *u*:: Q*T*, *t*: *DH*, *e*. unde $e = \frac{tu}{s} = \frac{yi}{z}$, quare $\frac{tzu}{sy} = i = \frac{hu}{z}$, & tandem $tzz = shy$; unde patet propositum.

*Coroll*. I. Hoc in exemplum: sit F. XLVIII. spiralis *DVSH* P ad Circulum *APX* pertinens, cujus radius, *r*, peripheria, *d*, S*D*: *z*, *DF*: *t* recta FS tangat spiralem in S, infinitesimæ, S*I*: *e*, *HI*: *a*, sitque juxta quemvis tum in radio tum in circumferentia motum, vocato arcu *P A* ad lineam S*D* relativo: *c*, æquatio spiralis, $r^k : d^s :: r^k : c^s$, erit juxta §. 67 Cap. I. de tangent. *D* F seu $t = \frac{kcz}{sr}$, & per curvæ æquationem ipso *c* amoto $\frac{s^s r^{k+s}}{d^s k^s} t^s = z^{k+s}$, quæ æquatio est ad parabolarum unam; ducto enim ad spiralis principium *P* radio *DP*, factâque *DM* = *D* S = *z*, & *DL* = *DH*; erit *LM* = *H*S = *a*, positâq. *D* F seu *t* in *MN*, donec per omnia *N* duci possit Curva *DNOR*; erit *t* applicata, & *DM* seu *z* intercepta, ac $RP = \frac{kd}{s}$, & rectangulum

gulum $PDQR = \frac{kdr}{s}$: sed juxta §. 11. Cor. I. erit parabolõides $DRP$ $\frac{kdr}{k+2s}$ = omnia $ta$; = $\frac{2ze}{2}$ = duplum areæ spiralis ex §. 10; quare spatium spirale æquatur $\frac{\frac{1}{2}kdr}{k+2s}$, quod est ad Circulum seu $\frac{1}{2}dr$, ut $k$ ad $k+2s$; hæc quoque, sed alio modo, demonstrata dedit doctissimus *Slusius* in miscellaneis.

*Corol. II.* Quod si spiralis ejus sit naturæ, ut circuli radios $BD$ ad eundem semper angulum secet, erunt triangula $SHI$ perpetuo similia, angulus enim I rectus est, & $H$ ex supposito in omnibus constanter æqualis. Sit ergo laterum $SI$: $e$ ad $HI$: $a$ ratio permanens ut $p$ ad $q$, erit $pa = qe$, adeoque $qze = pza$; & per §. 13. conversum spatium spirale infinitum $SVD$ seu omn. $\frac{ze}{2} = \frac{pzz}{4q}$; seu cum sit $p : q ::$ $GD, n : PD, r$, (positâ $GP$ spiralem in $P$ tangenti, ac $GD$ ipsi $DP$ normali) erunt omnia $\frac{ze}{2} = \frac{nzz}{4r}$; unde calculum ad totum spirale spatium $PSVD$ aptando, erit $z = r$, adeoq. hoc spatium infinitum = $\frac{nr}{4}$ = semitriangulo $PDG$. Notari potest, si $AB$ vocetur: $o$, fore $e =$

$\frac{zo}{r} = \frac{pa}{q}$, unde hæc proportio $\frac{pr}{q}$ : *o* :: *z* : *a* ; jam posita *o* constanter æquali, hoc est *PB*, *PA*, &c, in progressione arithmeticâ, habebit *z* ad *a* rationem semper eandem) adeoque omnia *z* erunt in progressione geometricâ; cum quantitatibus, quæ differentiis suis proportionales sunt, hoc esse proprium ex elementis notum sit.

50. Forsitan & hinc ortum trahentes *involutarum* (quas vocant) & *evolutarum figurarum* proprietates addidisse operæ fuerit pretium.

Sit *Fig. L.* spatium *ABHG* in trapezia infinitesima *CEFD* præcedentium more divisum; concipianturq. curvæ partes *CD* earumq. sinus *CL* filorum in modum flexiles, poterunt igitnr manentibus applicatis, *A* B, *BC*, *FD*, *GH*, rigidis, singula trapezia *CEFD* mutari in trilinea *κγδ* in *Fig. LI.* si puncta ninurum *E* & *F* cöincidant; quod si fiat in singulis *Fig. L.* trapeziis, & omnia divisionum axis puncta supponantur in *G* cöire, orietur *Fig. LI.* *κβη*, & punctum *κ* referet omnium punctorum *AEFG* coalitum; diciturque Figura *κβη* Figuræ *ABHG* *involuta*, & hæc illius *evoluta*, quarum sequentes obviæ sunt proprietates.

I°. Cum rectangulum *CLFE* cogatur in cir-

circuli sectorem infinitesimum $\gamma\lambda\kappa$, hoc est dimidium sui, ob angulos in $\gamma$ & $\lambda$ rectos, ac linearum $\gamma\lambda$ & $CL$, item $\gamma\kappa$ & $EC$ æqualitatem: quod si idem fiat in omnibus, erunt omnia rectangula $CEFL$, seu Figura $ABHG$, dupla omnium triangulorum $\kappa\gamma\lambda$ seu Figuræ involutæ $\kappa\beta\eta$.

2°. Quia ex hypothesi $CL = \gamma\lambda$, & $CD = \gamma\delta$, erunt, ob angulos in $L$ & $\lambda$ rectos, triangula $CLD$ & $\gamma\lambda\delta$ similia & æqualia: quare posito angulo $\tau\kappa\gamma$ recto, quia $\gamma\kappa = EC$, erunt & hisce similia triangula $\tau\kappa\gamma$ & $TEC$ similia & æqualia inter se.

3°. Sic & arcum $\beta\rho$ radio $\kappa\beta$ descriptum axe $AG$ minorem, arcum vero $\mu\nu$ radio $\kappa\mu$ descriptum eodem axe majorem esse ex præmissis sponte fluit.

Duo vero sequentia problemata fundamenti loco cæteris huc spectantibus substerni possunt.

§. 51. Quorum primum sit; ex data involuta $\kappa\beta\eta$ ejus evolutam $ABHG$ invenire.

Ad cujus problematis solutionem, (cum dentur $\kappa\eta = GH$, $\kappa\delta = FD$, $\kappa\gamma = EC$ ex involutæ natura) requiritur $EG$ axis longitudo in respectu ad datam applicatam $EC$ seu $\kappa\gamma$; quæ hoc modo indagatur, sit $\tau\gamma = TE : t$, $\kappa\gamma = EC : y$,

$\gamma\lambda = CL : e$, $\lambda\delta = LD : a$, $\gamma\delta = CD : u$, $\tau\gamma = TC : s$. quia $\tau\varkappa : \varkappa\gamma :: \gamma\lambda : \lambda\delta$, seu $t : y :: e : a$, erit $e = \frac{ta}{y}$, & omnia $\frac{ta}{y}$ = omnia $e$ = omnia $EF$ = axis $AG$.

Quia vero $y$ est indeterminata, fiat. $\frac{ta}{y} = \frac{fa}{r} = e$, erit $f = \frac{rt}{y}$, quæ semper posita in $\iota\sigma$ erit trapezium $\iota\sigma\sigma\xi = fa$, & spatium $\iota\sigma\varphi\eta$ = omnia $fa$, quæ Figura divisa per $r$ dabit omnia $\frac{fa}{r}$ seu omnia $e$ inter $\eta$ & $\gamma$, hoc est axem $EG$, ad quem in puncto $E$ applicanda $\varkappa\gamma$ seu $\varkappa\iota = EC$.

Habeturq. adeo punctum $C$ in evolutâ, ad quem modum cætera inveniuntur; divisâ enim verb. Gr. Figurâ integrâ $\rho\psi\varphi\eta$ per $r$ oritur $AG$ seu integer evolutæ axis, cui si $AB = \varkappa\beta$ applicetur in $A$ habetur denuo punctum $B$ in evolutâ, & sic in cæteris.

*Coroll. I.* Resumtâ *Fig. XLVIII.* ac eâdem cum symbolis spirali, quæ §. 49. Cor. I. discussa fuit; cum sit $ze = ta$, adeoque $e = \frac{ta}{z}$, fit hoc $= \frac{fa}{r}$, erit hoc in casu, facto $MN = f$ æquatio Curvæ $DNO$: $rt = fz$; ejectâque, $t$ per valorem §. 67. de tang. inventum seu $\frac{kcz}{sr}$, re-

reductâque æquatione ad indeterminatas $f$ & $z$ oritur $k^s d^s z^k = s^s r^k f$ seu paraboliformis; unde spatium $DMN$ seu omnia $fa'$, juxta §. 11. Cor. I, æquatur $\frac{sfz}{k+s}$, & omnia $\frac{fa}{r} = \frac{sfz}{kr+sr}$ = omnia $e$ seu longitudo axis $AE$ in *Fig. XLIX.* ubi $EC = DS = z$, & $EF = e$, vocetur autem hæc $AE: h$, seu omnia $e$, oriturq. curvæ $ADH$ æquatio $\frac{sfz}{kr+sr} = h$, quæ redacta per superiora ad indeterminatas $h$ & $z$, seu $AE$ & $CE$, dabit æquationem rursus paraboliformem: $\overline{k+s}^s r^{s+k} h^s = k^s d^s z^{k+s}$ curvam $ACH$ respicientem; adeoque cum maxima $z$ sit $GH$ seu $r$, & maxima $h$ seu $AG$ sit $\frac{kd}{k+s}$, erit rectangulum $AQGH = \frac{kdr}{k+s}$; & juxta §. 11. Coroll. I. curvilineum $ADHG = \frac{kdr}{k+2s}$; est autem hoc spatium spiralis spatii evolutum juxta præcedentem, ergo juxta §. 50, hujus duplum, unde spatium spirale æquatur $\frac{\frac{1}{2}kdr}{k+2s}$, uti in §. 49. Coroll. I. malui autem iisdem exemplis insistere, ut principiorum consensus dilucidius ob oculos ponatur.

§. 52. Idem & alio modo problema solvitur; si quidem, *Fig. LI.* $\tau\gamma : \gamma\delta :: \tau\kappa : \gamma\lambda$. seu

 $s : u ::$

$s:u::t:e$; unde $\frac{tu}{s} = e$, sit hoc $= \frac{hu}{r}$ erit $rt = sh$: quare in *Figurâ LII.* positâ curvâ involutâ $\beta\gamma\delta\nu$ in directum, ut $\gamma\delta$ in utrâque sit æqualis $= u$, applicetur & in $\gamma$ linea $\gamma A = h$, erit $A\gamma\delta B = hu$, & $\beta DB\delta =$ omnia $hu$; quod spatium divisum per $r$ dabit omnia $\frac{hu}{r} =$ omnia $e$, seu longitudinem axis $AF$ in *Fig. L.* factâ nimirum $EC$ in *Fig. L.* æquali $\varkappa\gamma$. estque, uti patet, spat. $ABHG$ in *Fig. L.* spatii $\varkappa\beta\nu$ in *Fig. LI.* evolutum.

§. 53. Quin & hinc nascitur aliis jam exculta ex involutâ evolutam describendi methodus. Radio quolibet $\varkappa P$ seu $r$ describatur Fig. LI. arcus $PO$; cujus infinitesima, inter $\varkappa\gamma$ & $\varkappa\delta$ productas intercepta $QR$ sit: $o$, erit, ob radios arcubus proportionales, $\varkappa\gamma : \gamma\lambda :: \varkappa R : RQ$. seu $y:e::r:o$, unde $\frac{yo}{r} = e$. posito ergo arcui $ORQP$ in directum, *Fig. LIII.* applicetur in puncto $R$ linea $RI = \varkappa\gamma = y$, erit $IRQK = yo$, & $OQKH =$ omnia $yo$; quod spatium divisum per $r$ dabit omnia $\frac{yo}{r} =$ omnia $e = AE$ in evoluta Fig. *L.* ubi $EC = \varkappa\gamma = RI = y$, & curva $BD =$ curvæ $B\delta$.

*Coroll. I.* Sit Fig. XLVIII. eadem spiralis §. 49. & 51. in Coroll. tractata $DVSP$, factâ circuli

culi infinitesimâ $AB = o$. (quia $DS$ est $= z$) erit $zo = re$. & positâ circumferentiâ circuli in directum in $AEFG$, *Fig.* XLIX. ut $EF$ sit $= AB = o$, & $EC$ huic applicata $= DS = z$, erit $EA = c$; & curvæ $ACDH$ æquatio eadem cum spirali $d z^k = r c^s$, quæ ad Figuram XLIX relata est paraboliformis.

Unde, §. 11. Cor. I. $AEC$ spatium est $= \frac{kcz}{k+s} =$ omnia $zo$ seu omnia $ECDF$; ergo omnia $\frac{zo}{r} = \frac{kcz}{kr+sr} =$ omnia $e$; sint autem omnia $e = h$, & in *Fig.* *L.* ei æqualis statuatur $AE$, cui applicetur $EC$ seu $z$, erit hujus curvæ æquatio $\frac{kcz}{kr+sr} = h$; & per æquationem spiralis curvæ ablato $c$, ac æquatione inter $z$ & $h$ constitutâ, erit $d^s k^s z^{k+s} = \overline{k+s}^s r^{k+s} h^s$; est autem in *Figurâ.* L. spatium $ABGH$ spiralis evolutum, adeoque hujus duplum, & juxta §. 11. Cor. I. æquale $\frac{kdr}{k+2s}$, unde spirale $\frac{\frac{1}{2}kdr}{k+2s}$, ut supra jam sæpius inventum.

§. 53. Alterum, quod considerationem hic meretur, problema est, ex datâ evolutâ invenire involutam.

Sit Fig. L. data evoluta $ABHG$; cujus ut inveniatur involuta $\kappa\beta\eta$, Fig. LI. determineturq. ideo in hæc punctum $\gamma$ respondens evolutæ puncto $C$, patet quidem lineam $\kappa\gamma$ seu $\kappa\iota$ æquari lineæ $EC$, sed & præterea ad definiendum punctum $\gamma$ requiri anguli $\gamma\kappa\iota$ determinationem, seu arcus $\gamma\iota$ aut $PR$: quod ut fiat, resumto §. præced. erat $yo = re$; adeoque $\frac{re}{y} = o$, sit hoc $= \frac{be}{r}$, erit $\frac{rr}{y} = b$; quæ applicetur in $EN$ erit $NEFS$ seu $be$ duplum sectoris circuli $\kappa RQ$, seu $= \frac{2ro}{2}$; adeoq. omnia $be$ seu spat. $NEGK$ duplum sectoris $\kappa RP$; hoc autem spatium divisum per $r$ dabit omnia $o$, seu arcum $RP$, quo dato angulum $R\kappa P$ dari notum est; unde si in radio $\kappa R$ sumatur linea $\kappa\gamma$ ipsi $EC$ æqualis, habetur in involutâ punctum $\gamma$ respondens evolutæ puncto $C$, quo invento & cætera eodem modo investigari possunt.

CA-

# CAPUT III.

## *De Corporum ex Curvilineis ortorum dimensionibus.*

§. 1. EX superioribus Fig. LIV. spatium *ADEFO* polygonum est, quia curva *ADEF* rectulis *DE* & similibus constat; in quo spatio, tanquam basi, si erigatur corpus columnare in altitudine *A*α, seu *O*ω constabit hoc infinitis columnulis, quarum bases sunt trapeziola *DQPE*, altitudines *Q*κ, *P*π, quod ex geometriæ vulgaris præceptis notum est.

§. 2. Cujus columnulæ valor algebraicus ut inveniatur, fiat ut supra $DQ:y$, $QP = DH:e$, $EH:a$, $DE:u$, altitudo $A\alpha:r$. erit quæsita columnula $rye$, hoc est æqualis basi in altitudinem ductæ; adeoque integra columna = omn. $rye$; seu, juxta præcedentem omnibus parallelopipedis in basi rectangulâ *DQPH*, cum prisma triangulo *DHE* insistens ob ipsius trianguli nullitatem nihilo sit æquale; est enim triangulum $DHE = \frac{ae}{2}$, & prisma ei insistens $= \frac{rae}{2}$, quod ex lemm. 10 nullum est.

Quod hic, licet jam ad nauseam fere inculcatum, monemus, ne postea de sectione columnari acturi illud repetere necesse habeamus. Cum omnia corpora, tum pyramidalia, tum cylindrica &c. basin nihilo æqualem habentia etiam nihilo æquivaleant, adeoq. in calculo prætermitti debeant.

§. 3. Hinc patet, si fuerint duæ columnæ, quarum bases sunt in eadem latitudine *A O*, & applicata primæ baseos: *y*, secundæ: *z*, tum altitudo primæ columnæ: *r*, secundæ: *s*, si infinitesima *e* sibi perpetuo constans & æqualis assumatur, fore primam columnam seu omnia *rye* ad secundam seu omnia *sye*, ut omnia *ry* ad omnia *sy*, hoc est, ut summa rectangulorum *Q* x *δD* ex applicatis singulis in altitudinem ductis in primâ columnâ: ad totidem respondentia rectangula in secundâ.

Plura hinc quilibet ad §. 6, 7, 8, 9, &c. Cap. præc. normam facile deducet.

§. 4. Quod si *Fig. LV. N°.* I. columna hæc plano per lineam *C B* ipsi *A O* æquidistantem transeunte, quodq. plano per utriusque baseos axem F *O* incedenti normale est, obliqué secetur, ortum hinc ducent duo columnæ segmenta, superius & inferius, iisdem corpusculorum generibus inversé constantia; quæ *truncorum* nomine vocant Geometræ.

Hos consideranti innotescit truncum inferiorem

rem constare infinitis Corpusculis, quorum bases sunt trapezia $DQPE$, altitudines ab unâ parte $PG$, $QI$, ab alterâ $EN$, $DK$; quæ ut calculo explicentur, cæteris, ut supra, appellatis, dictisq. $QI: l$, & $KD: s$, erunt primo omnia basi triangulari $DHE$ directe insistentia ob ipsius trianguli nullitatem ex lemm. 10 rejicienda; unde tantum pro calculo restat rectangulo $PQDH$ insistens prisma $PQIGLKDH = \frac{sye+lye}{2}$, æquale parti infinitesimæ trunci inferioris a plano resecti; quare factis $CT: b$, $TS: h$, $QC: d$, erit $QI$ seu $l = \frac{hd}{b}$, & $KD$ seu $s = \frac{hd}{b} + \frac{hy}{b}$; unde hoc in casu constabit truncus omnibus, $\frac{h}{b}$ in $d + \frac{1}{2}y$ in $ye$; & supposito $h = b$, hoc est angulo $RBV$ semirecto, componetur truncus omnibus, $d + \frac{1}{2}y$ in $ye$, seu $\frac{2dye+yye}{2}$; iterumq. si fiat $CD$ seu $d + y = z$, constabit idem truncus omnibus $\frac{zze-dde}{2}$.

§. 5. Unde exposito alio cylindrico, (cujus basis ejusdem latitudinis cum $AO$) oblique secto, factâq. divisione per $e$, erit truncus inferior primi cylindrici ad truncum inferiorem secundi, ut omnia trapezia $OQDK$ in primo ad

ad omnia trapezia correspondentia in secundo.

Hoc notetur, cum hæc trapezia I Q *D K* sint continuo $= \frac{2dy + yy}{2} = \frac{zz - dd}{2}$, seu æqualia differentiis quadratorum in *C D* & *C* Q constitutorum, truncorum rationem per has differentias exprimi posse.

§. 6. Quod si planum secans non transeat per *B C*, sed per basis axem *A O*, erit Q *C* seu $d = 0$: quique hinc resultabit truncus, *ungulæ* nomine alias dictus, constabit infinitis $\frac{hyye}{2b}$ seu prismatibus *P* H L *K D* Q.

Eritque in ratione ad aliam ungulam, ubi *e* sibi semper æqualis divisione excidit, ut omnia $\frac{hyy}{2b}$ seu triangula *K* Q *D*, ad totidem triangula in secundâ ungulâ.

§. 7. Si vero fiat $h = b$, & angulus ideo quo planum secans lineam *A O* transit semirectus, erit $\frac{yye}{2}$ hujus ungulæ, quæ hâc de causâ semiquadrantalis vocari solet, pars infinitesima; atque triangulum *K* Q *D*, hoc in casu $= \frac{yy}{2}$.

§. 8. Si autem non $\frac{hyy}{2b}e$, sed $\frac{hyye}{b}$, pro parte Corporis infinitesimâ assumatur, aliud solidi genus efformabitur, duplum ungulæ: factâ

ni-

nimirum *Fig.* L*VI.* linea *D* Q ut supra $= y$, fiat continuo, ut *b* ad *h* ita *y* ad $\frac{by}{b}$, quæ si statuatur in *M* Q, normalis Figuræ *A O* F, erit completum parallogrammum Q *M* I *D* $= \frac{byy}{b}$; quod si ducatur in infinitesimam Q *P* seu *e*, oritur parallelopipedum solidi hujus infinitesimum; cum cætera extra hoc parallelopipedum extantia corpuscula juxta lem: 10 ex calculo evanescant.

Hoc autem perpetuis his parallelopipedorum aggregatis conflatum solidum *A O* F *C B* ejus est proprietatis, ut quælibet sectio, rectangulo *B O* F C parallela, faciat parallelogrammum *M* Q *D* I seu $\frac{hyy}{b}$. quod monuisse sufficiat, cum & hoc principii loco pro Curvilineorum mensuris statui possit; quoniam vero ungulæ simpliciores forsan visæ fuerunt, iis potius insistere voluisse geometras vero est simile.

§. 9. Cum autem *Fig.* L*VII.* trunci ungulæve basis *A O* F, juxta superiora, non tantnm respectu *A O* in trapezia *D* Q *P E*, verum & respectu *O* F in trapezia *D G* I *E* dividi potest, constabit, hoc supposito, ungula truncusve *A O F V* solidis trapezio *D G* I *E* insistentibus, quale est *D G* I *E M S K* L.

Quod ut Calculo exprimatur, fiat I L: *s*,
*E I*: *x*,

*EI*: $x$, infinitesimæ *GI* seu *KT*: $e$, L*T*: $i$; erit *KG* seu *IT*: $s-i$; jam vero cum triangula *KT*L, *MRN*, *D*H*E*, *SNR*, juxta lemm. 10, nihilo æquivaleant; restabit solum parallelopipedum *GITKNRE*H: $= sxe - ixe$ $= sxe$, (ex eodem lemm. 10) pro solidi hujus infinitesimâ; adeoque ungula sive truncus quovis modo per *AO* resectus in ratione ad alium elisâ utriuq. $e$, ut omnia $sx$ seu omnia rectangula *M*L*IE*.

Unde si solidum sit ungula semiquadrantalis per *AO* resecta, erit L*I* seu $s =$ OI seu $y$, adeoque $sx = yx =$ rectangulum *M*L*IE* = rectangulum OI*EP*; quare hoc in casu ungula semiquadrantalis *AOFV* algebraice per omnia $yx$ efferetur.

§. 10. Sit *OC*: $d$, & *BC* ipsi *AO* parallela, erit *C*I: $d+y$ seu *CO*+OI, seceturq cylindricus ipsi *AO*F insistens plano seminormaliter per *BC* transeunte, erit trunci inferioris infinitesima $= dxe + xye$; & ratio trunci ad alium ejusdem latitudinis calculo designabitur per omnia $dx + xy$, seu rectangula ex *C*I in I*E*.

§. 11. Quod si perpetuo fuerit *C*I ad IL ut $b$ ad $h$, erit trunci inferioris cylindrici, in angulo, quem data ratio ipsius $b$ ad $h$ determinat, per *BC* resecti infinitesima absoluta =

$dx + yx$ in $\frac{he}{b}$, respectiva vero ad alium ejusdem latitudinis truncum = rectangulum $dx + yx$ in $\frac{b}{b}$.

§. 12. Hoc notetur, *Fig.* L*V*. *N°*. 1. truncum cujuslibet cylindrici inferiorem æquari summæ cylindrici in eâdem basi constituti in altitudine *PG*, & ungulæ ejusdem cylindrici basi superiori insistentis, eodem plano, per *IG* ad eundem angulum transeunte, resectæ.

Demonstratio ex appositæ Figuræ inspectione patet. Tum & calculus eandem statim prodit, sit enim $\frac{dhye}{b} + \frac{yyhe}{2b}$ infinitesima trunci juxta §. 5. est $\frac{dhye}{b}$ ex §. 2. ad cylindricum, & $\frac{yyhe}{2b}$ per §. 6. ad ungulam. si vero trunci infinitesima, juxta §. 11, ponatur. $\frac{h}{b} dxe + \frac{h}{b} xye$, idem eveniet; consequentiæ ratio ex §. 9. elucescit.

Corollaria casus particulares concernentia hic non adjungo, cum in sequentibus abunde circa solida ex rotationibus genita sese ingestura sint.

§. 13. Neque tantum ad curvilinea, quæ axem ac basin rectilineam habent, modo de-

ducta

ducta extenduntur; verum & *Fig.* L*V.* *N°*. 2. ad Figuras quibuslibet peripheriis terminatas, applicari possunt; cum enim triangula *DHE* ac Q*P*O, ex lemmate 10, nihilo æquivaleant, erunt & solida iis superstructa nihilo æqualia: adeoque & hoc in casu, trunci ungulæque per eadem, quæ modo ex calculo inventa sunt, prismata designabuntur.

## *De Corporibus ex Curvilineorum rotatione genitis.*

§. 14. Rectangulum *ABEP*, *Fig.* L*VIII.* constat infinitis rectangulis Q*PEF*, *R*QF*T*, &c. seu (vocatis *PE*: *b*, Q*P* infinitesimâ: *e*) omnib. *be.* quæ rectangula Q*PE*F, &c. si circa respectivos axes *P*Q, Q*R*. &c. rotari concipiantur, efficient infiniti hi cylindruli integrum cylindrum ex *APE*B circa *AP*; exiguorumq. horum cylindrorum valor algebraicus, juxta cylindri mensuram in elementis traditam, erit $\frac{bbce}{2r}$. (positâ nimirum ratione radii ad circumferentiam ut *r* ad *c*, quod & in sequentibus semper obtinebit) adeoq. totus hic cylindrus explicabitur per omnia $\frac{bbce}{2r}$:

quæ

quæ (appellatâ $AP:d$, æquivalebunt termino absoluto $\frac{bbcd}{2r}$.

§. 15. Huic rectangulo $APEB$ inscriptum sit triangulum $APE$, vocatisque $AR:x$, $RX:y$, $SR$ infinitesima: $e$, erit trianguli proprietatem exprimens æquatio $bx = dy$, constabitque hoc triangulum juxta Cap. præc. §. 4. omnib. $ye =$ omnib. $\frac{bxe}{d}$ hoc est infinitis rectangulis $SRXZ$; hæc autem omnia rectangula seu triangulum $APE$, si circa axes suos $SR$ convertantur, generabunt conum $AEM$ innumeris cylindrulis hisce constantem; quorum cylindrulorum valor analyticus ex §. præc. est $= \frac{cyye}{2r} = \frac{cbbxxe}{2rdd}$; unde conus $AEM$ æquivalet omnibus $\frac{cbbxxe}{2rdd}$, seu (juxta Cap. II. §. 13.) absolutæ quantitati $\frac{cbbx^3}{6rdd}$. quæ, positâ $x$ maximâ $= d = AP$, transit in hanc $\frac{cbbd}{6r}$.

Unde patet conum $AEM$ esse ad cylindrum circumscriptum $BENM$, ut $\frac{cbbd}{6r}$ ad $\frac{cbbd}{2r}$ adeoque ut 1 ad 3.

Malui hoc in casu; methodi gratiâ, Figuras circum-

 scriptas

ſcriptas adhibere; rationemq. coni ad cylindrum, utpote ex Cap. II. §. 13. immediate profluentem, eodem cum cæteris principio demonſtrare; cum conus, ut ut ex figurâ rectilineâ ſeu triangulo ortum ducens, rotationis tamen nomine curvilineis annumerandus videatur.

§. 16. Hoc notetur, cum in ſequentibus ſemper ſubintelligendum veniat, eadem hæc omnia in converſione partiali locum habere. Si enim rectangulum *APEB* circa axem *AP* per arcum *IE* tantum convertatur, erit (arcu ſimili in radio $r$ poſito $= f$) pars cylindri converſione iſthâc imperfectâ geniti $= \frac{bbfe}{2r}$.

Poſſent ex eodem, quo §. 15. uſi ſumus, fundamento, ſeu curvilineorum in rectangula diviſione, generalia ſolidorum ſymptomata deduci, cum vero eorum in trapezia diſtinctio tum hanc, quam intendimus, ſolidorum diſcuſſionem, tum & ſuperficierum conöidalium naturam magis directe ſpectet, hanc viam eligemus.

§. 17. Ex præc: *Fig. LIX*, ſpatium *AOF* conſtat infinitis trapeziis *DQPE*, *EPOF*, &c; quæ ſi ſingulæ rotentur circa ſuos axes, *QP*, *PO*, efficient totidem conos truncatos, vertices habentes in *T* & *V*, ubi tangentes ſeu Curvæ coincidentes *DE*, *FE*, productæ axem *OA* ſecant; omnesque hi coni truncati ex trapeziis *DQPE* circa axes *QP* volutis conficient ſolidum ex integrâ Figurâ mixtillineâ

tilinea *ADEFO* circa axem suum *AO* rotatâ.

§. 18. Ut ergo ejusmodi coni truncati valor indagetur: retentis, quae supra symbolis, & ratione radii ad circumferentiam posita, ut $r$ ad $c$, erit circulus radio *QD* seu $y$ descriptus $= \frac{cyy}{2r}$; qui ductus in $\frac{1}{3}$ *QT* seu $\frac{1}{3}t$, dabit $\frac{\frac{1}{3}tcyy}{2r}$ pro soliditate coni minoris ex triangulo *QTD* circa *QT* voluti. Jam vero circulus radio *PE* descriptus est $\frac{cyy + 2cay + caa}{2r}$, qui multiplicatus per $\frac{1}{3}$ *PT*, seu $\frac{1}{3}t + \frac{1}{3}e$, dabit, rejectis per lemma 10. rejiciendis, $\frac{\frac{1}{3}tcyy + \frac{2}{3}tacy + \frac{1}{3}ceyy}{2r}$ pro contento coni ex triangulo *TPE* circa *TP* circumacto; ex quo si detrahas conum minorem modo inventum $\frac{\frac{1}{3}tcyy}{2r}$, restabit coni truncati ex trapezio *DQPE* circa *QP* rotati quaesitus valor: $\frac{\frac{2}{3}tacy + \frac{1}{3}ceyy}{2r}$, seu $\frac{ceyy}{2r}$, aut $\frac{atcy}{2r}$ (est enim $at = ye$ ex §. 11. Cap. praec) jam vero $\frac{ecyy}{2r}$ est aequale cylindro ex rectangulo *QDPH* circa *QP*, & pars conoidis quaesiti infinitesima.

 §. 19. Hinc

§. 19. Hinc si fuerint *Fig. LX.* duo curvilinea *A*F*O* & *AGO* ad eundem axem *A O* constituta, sintq. applicatæ in primo $y = DQ$, in secundo $z = RQ$, erit, ut Conoides ex primo *A*F*O* circa *A O* rotato ad conoides ex secundo *AGO* circa eandem *A O*, ita omnia $\frac{c}{2r}.eyy$ ad omnia $\frac{c}{2r}\,ezz$; & divisis per $e$, ut omnia $\frac{c}{2r}\,yy$ ad omnia $\frac{c}{2r}\,zz$, hoc est ut omnes circuli ex applicatis, tanquam radiis, descripti in primâ ad omnes circulos correspondentes in secundâ Figurâ; tandemque, rursus divisione per $\frac{c}{2r}$ factâ, ut omnia $yy$ ad omnia $zz$, seu ut omnia applicatarum quadrata in primâ Figurâ ad omnia applicatarum quadrata in secundâ; potest & hoc addi, omnia $\frac{c}{2r}\,eyy$ esse ad omnia $\frac{c}{2r}$ $ezz$, ut omnia $\frac{yye}{2}$ ad omnia $\frac{zze}{2}$; hoc est conoides ex *A*F*O* circa *A*O ad conoides ex *AG*O circa eandem *A*O, ut ungula semiquadrantalis cylindrici in basi *A*FO per *A*O resecti, ad ungulam semiquadrantalem in basi *AG*O; juxta 7 hujus.

§. 20. Rursus, cum *Fig. LX.* conoïdes ex *A*F*O*

*A F* O circa *A* O sit æquale omnibus $\frac{cyye}{2r}$ & conöides ex *A G* O circa eandem *A* O æquale omnibus $\frac{cezz}{2r}$, erit solidum secundum demto solido primo, seu solidum cavum ex *A G F* circa *A* O æquale omnibus $\frac{cezz}{2r} - \frac{ceyy}{2r}$: quâde causa, si aliæ duæ curvæ *A I O* & *A K M* ad eundem aut æqualem axem applicentur, sitque *QI*: *h*, & *QK*: *k*, erit solidum cavum ex AOM circa AO æquale omnibus $\frac{cekk - cebb}{2r}$.

Unde solidum ex *A G F* circa *A O* ad solidum ex *A M* O circa *A* O, ut omnia $\frac{cezz - ceyy}{2r}$ ad omnia $\frac{cekk - cebb}{2r}$ & divisis per *e* ut omnia $\frac{czz - cyy}{2r}$ ad omn. $\frac{ckk - cbb}{2r}$ seu ut omnes differentiæ circulorum in radiis *RQ* & *DQ* ad totidem differentias circulorum in radiis *QK* & *QI*; aut potius ut omnes armillæ ex omn. *RD* circa *A* O ad totidem armillas ex omnibus *I K* circa AO; rursumq. divisione per $\frac{c}{2r}$ institutâ, ut omnia $zz - yy$ ad omnia $kk - hh$, hoc est ut differentiæ quadratorum *R* Q & *D* Q ad differentias quadratorum in Q*K* & Q*I*; unde factis $z - y = f =$

 *RD*

$RD$, ac $k-h=g=IK$, erunt solida inter se, ut $2fy+ff$ ad $2gh+gg$.

*Coroll. I.* Hoc notetur, Corpora cava seu annularia, ex armillis composita per quadratorum in applicatis constitutorum differentiam exprimi.

*Coroll. II.* nec opus est addi; cum omnia $\frac{czze-cyye}{2r}$ sint ad omnia $\frac{ckke-chhe}{2r}$ ut omnia $\frac{zze-yye}{2}$ ad omnia $\frac{kke-hhe}{2}$; esse solidum annulare ex $AG$F circa $AO$, ad solidum ex $AM$O circa $AO$, ut truncus inferior cylindrici basi $AG$F insistentis ac per $AO$ semiorrmaliter resecti, ad truncum inferiorem in basi $AOM$ per eandem $AO$ resecti: juxta § 4. hujus.

§. 21. Sit jam $r$ ad $s$ ratio immutabilis: ac semper $r:s::zz:yy$; erit conoides ex $AG$O circa $AO$, ad conoides ex $AF$O circa $AO$, ut $r$ ad $s$, juxta lemma 43.

Ac si fuerit perpetuo $r:s::zz-yy:hh$; erit solidum annulare ex $AG$F circa $AO$ ad conoides ex $AF$O circa $AO$, ut $r$ ad $s$; & posito $r=s$, erit solidum annulare illud æquale hinc corpori conoidali.

*Coroll. I.* patet hinc, si loca duorum, hoc est ipsorum $z$ & $y$ ad arbitrium sumantur; locum reliquum, ad quem $h$ futurum est, hinc

pate-

patefactum iri. positâ enim $AQ:x$, sit $z$ ad parabolam $AGO$, ut sit $2rx = zz$; & $y$ ad triangulum isosceles $AFO$, unde $y = x$; erit suffectis in locum $z$ & $y$ valoribus, $2rx - xx = hh$, unde $QI$ seu $h$ ad semicirculum $AHO$, cujus centrum W. quare si parabola latere recto $2r$ descripta $ARQ$ circa axem $AQ$ rotetur; & triangulum $ADQ$ circa eandem $AQ$ volvatur; erit differentia, quâ conoides parabolicum seu omnia $2rx$ superat conum seu omnia $xx$, æqualis portioni sphæricæ ex segmento semicirculi $AQI$ circa eandem $AQ$ revoluto genitæ.

*Coroll. II.* Si vero portionis hujus sphæricæ non ratio ad alia solida, verum absolutus valor quæratur; est segmentum sphæricum ex $AQI$ circa $AQ$ rotatum $=$ omnia $\frac{hhce}{2r}$ $=$ omnia $\frac{2rcxe - cxxe}{2r}$, ex modo demonstratis: sed ex Cap. II. §. 12. Sunt omnia $2rcxe = rcxx$, tum omnia $cxxe = \frac{1}{3}cx^3$, adeoque omnia $\frac{hhce}{2r}$ seu portio sphærica $= rxx - \frac{1}{3}x^3$ in $\frac{c}{2r}$ $=$ cono, cujus basis circulus radio $QI$ descriptus, altitudo $\frac{3rx - xx}{2r - x}$ seu $\frac{QO + WO}{QO}$ in $QA$. Si vero quæratur integra sphæra, fiat $x = 2r$, erit-

 que

que $rxx - \frac{1}{3}x^3$ in $\frac{c}{2r} = \frac{2}{3}rrc$; adeoque hæc ſphæra ad cylindrum circumſcriptum $rrc$, ut 2 ad 3.

§. 22. Potuiſſet & in Fig. *LX.* aſſumtâ Fig. quartâ A*M*O, cujus applicata Q*L* $= k$, fieri perpetuo $kk - hh = rr - yy$ hoc eſt ſolidum annulare cavum ex A*M*O circa AO æquale ſupponi ſolido annulari modo dicto ex AFG circa eandem AO, unde locis trium ex hiſce cognitis cognoſcetur ſemper locus quarti.

§. 23. Neq. poſt hæc intellecta dictu opus autumo, ſi axis rotationis *BC* ſit extra Figuræ cujuslibet, ut *M*A*G*, ambitum, omnia ſimiliter obtinere. Facto enim *SC*: $z$, & *CL*: $y$, ſolidum annulare ex Figura *M*A*G* circa *CB* rotata in ratione ad aliud ſolidum æque altum, explicabitur per omnia $zz - yy$, aut poſitâ *LS* ſeu $z - y = f$: per omnia $2yf + ff$.

§. 24. Cum autem non tantum trapeziis *D*Q*PE* planum mixtilineum AOF Fig. *LXI.* conſtet, verum & trapeziis *DIGE*; quæ ſi rotentur circa axem *AO*, facient ſingula trapezia ſingulos tubos ſeu ſolida tubulata; quæ ſimul ſumta integrum conſtituent conöides ex Figurâ *AFO* circa *A*O rotatâ.

§. 25. Pro ſingulorum ergo valore inveniendo, retentis ſuperioribus ſymbolis, ſit præterea

rea QO seu $DI: x$, $HE$ seu $GI: a$ infinitesima; unde, quia $OI: y$, erit $OG: y+a$, & $GE: x-e$; jam autem juxta §. 18. erat conus truncatus ex $DQPE$ circa $QP = \frac{ceyy}{2r}$; cui adde cylindrum ex rectangulo $POGE$ circa $PO = \frac{cyyx}{2r}$ $\frac{+2acyx-ceyy}{2r}$, orietur solidum ex pentagono $QDEGO$ circa $QO = \frac{cyyx+2acyx}{2r}$; ex quo si dematur cylindrus ex rectangulo $QDIO$ circa $QO$ seu $\frac{cyyx}{2r}$ orietur tubus quaesitus ex trapezio $DIGE$ circa $QO = \frac{acyx}{r}$; seu, ut ex calculo patet, tubus ex rectangulo $DIGS$ circa $QO$, quae conoidis hoc modo considerati infinitesima est.

*Coroll. I.* Quod si $OF = AM$ sit $= p$, & $AO = MF = b$; erit cylindri ex rectangulo $AMFO$ circa $AO$ infinitesima $= \frac{byac}{r}$.

§. 26. Sint jam *Fig. LX.* duae Figurae $AGO$ & $AFO$ ad eundem axem $AO$ positae; vocatisq. $RQ: z$, $DQ: y$, infinitesima $QP: e$, intercepta $AQ: x$, erit ex praecedenti solidum ex $AGO$ circa $\beta A\pi$, quae per verticem applicatis parallela est, aequale omnibus $\frac{zxec}{r}$; &

 soli-

ſolidum ex *AFO* circa eandem $\beta A \pi$ æquale omnibus $\frac{yxec}{r}$.

Unde illud ſolidum ad hoc, ut omnia $\frac{zxee}{r}$ ad omnia $\frac{yxec}{r}$; & diviſione facta per *e*, ut omnia $\frac{zxc}{r}$ ad omnia $\frac{yxc}{r}$, ſeu ut omnes ſuperficies cylindricæ aut tubulatæ ex applicatis *R*Q, in diſtantia ſua AQ & poſitione ſuâ ad AQ normali, circa $\beta A \pi$ rotatis, ad totidem ſuperficies cylindricas ex omnibus *D*Q in eadem diſtantia AQ circa eandem $\beta A \pi$ volutis; & factâ rurſum diviſione per $\frac{c}{r}$, erit ſolidum primum ad ſecundum, ut omnia $zx$ ad omnia $yx$; hoc eſt ut ſumma rectangulorum ex lineis RQ axi rotationis $\beta A \pi$ parallelis in reſpectivas ab eodem axe diſtantias ductis factorum, in primâ Figurâ, ad ſummam rectangulorum reſpondentium in ſecundâ Figurâ, manente eâdem ab axe diſtantiâ AQ; hoc addatur, cum $\frac{zxec}{r}$ ſemper ſit ad $\frac{yxec}{r}$ ut $zxe$ ad $yxe$; fore ſolidum primum ad ſecundum ut truncus cylindrici ungulave in baſi A*G*O ſeminormaliter per $\beta A \pi$ reſecti, ad ſimilem ungulam in baſi AFO; conſequentiæ ratio ex 9 hujus manifeſta eſt. *Scholl.*

*Schol.* Hoc notetur *Fig. LXI.* si *QD* seu *OI* sit *y*; & *QO* seu *DI* sit: *x*; *PQ*: *e*; *IG*: *a*, fore rectangulum *QODI* seu *xy* exponens rationis solidi ex spatio *AOF* tum circa *AO*, tum circa *QF* rotato, juxta præcedentem; ne autem hic error subrepat, si solidum designetur per rectangula *xy*, notetur semper illud ad infinitesimam *e* vel *a* reducendum esse; cum omnia $\frac{xyec}{r}$ constituant solidum ex *AOF* circa *OF*, & omnia $\frac{xyac}{r}$ componant solidum ex eadem *AOF* circa *AQ* rotatâ; ut inquirenti patebit.

§. 27. rursus, sint *Fig. LXII.* duæ figuræ *RAF* & *GOQ*, ad æquales lineas *RF* & *GO* positæ; ita ut interceptæ *RQ* & *MG*, ac infinitesimæ *QN* & *ME*, continuo æquales sint, adeoque Figuræ ad eundem axem ordinari posse intelligantur; quæ cautela in hisce ubique necessaria. Vocatisque *RQ* = *GE*: *x*, *QN* = *ME*: *e*, *PQ*: *y*, *DE*: *z*, ac *BR*: *b*, & *BG*: *d*, utraque determinatâ; sitq. *HB* axis rotationis, erit, juxta præcedentes duas, solidum ex *RAF* circa *HB* æquale omnibus $\frac{byec + xyec}{r}$, illudque ex *QGO* circa eandem *HB* æquale omnib. $\frac{dzec + xzec}{r}$ unde solidum primum ad secundum, ut omnia $\frac{byec + xyec}{r}$ ad

ad omnia $\frac{dzec+xzec}{r}$; & divisis per constantem $e$, ut omnia $\frac{byc+xyc}{r}$ ad omnia $\frac{dzc+xzc}{r}$; hoc est ut omnes tubi cylindrici ex *P* Q circa *HB* ad totidem tubos seu superficies cylindricas ex *DE* circa eandem *HB*; ac, rursum institutâ divisione per $\frac{c}{r}$, ut omnia $by+xy$ ad omnia $dz+xz$, ut omnia rectangula ex applicatis *P* Q & *DE* in respectivas ab axe rotationis distantias *B* Q & *BE* ductis.

*Coroll. I.* Unde hoc notetur solida cava; seu annularia, ex tubis composita exprimi per modo recensita rectangula.

*Coroll. II.* Cum autem semper sit $\frac{byec+xyec}{r}$ ad $\frac{dzec+xzec}{r}$, ut $bye+xye$ ad $dze+xze$, erit, juxta §. 10. solidum primum ad secundum ut truncus cylindricus in Figurâ primâ per axem rotationis seminormaliter resectus ad truncum similem in secundâ Figurâ.

*Coroll. III.* Nec opus est addi ipsum solidum ex *RA* F rotatione genitum, seu omnia $\frac{byec+xyec}{r}$, æquari trunco cylindrici inferiori, basi *RA* F insistentis, ac per *HB* resecti ad angulum, quem ratio radii circuli ad circumferen-

ferentiam determinat; cum pateat hoc ex prægressâ §. 11. Idemq. circa §. 20. animadverti posset in solidis armillaribus.

*Coroll. IV.* Notetur hinc, si solidum quodlibet annulare seu tubulatum in æqualem truncum possit commutari, rationem radii ad circumferentiam circuli cognitam esse.

*Coroll. V.* Cætera hinc facile eliciuntur, ut & ea, quæ solida ex Figuris circa axi aut basi parallelas rotatis genita spectant, cum $HB$ ut talis considerari possit. Item $BC$ circa solida armillaria: §. 23.

§. 28. Pro specialibus solidorum mensuris præcedentis Capitis §. 11 Coroll. V, VI, VII, VIII. ut & §. 12. & 13. dilucide satis fundamenta tradunt. ne tamen nihil dixisse videar, solidorum ex parabolis genitorum contemplationem primo ex præcedentium more aggrediemur.

I. Sit parabola $AFO$, *Fig. LXI.* in quâ $AQ : x$, $QD : y$, æquatio $r^{p-q} x^q = y^p$. quæritur ratio solidi ex eâdem circa $AO$ rotatâ geniti, seu omnium $yy$ = omnium $r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q}{p}}$ ad omnia $bb$, seu cylindrum ex rectangulo $AOFM$ circa $AO$; eritq. ex §. 11. Coroll. V. Cap. præced. ut $p$ ad $p+2q$. cum vero omnia $\frac{yy}{2}$ sint juxta §. 7. ad ungulam semiquadrantalem

lem in basi parabolicâ per $AO$ resectam, erit & hæc ad omnia $\frac{bb}{2}$ seu similem ungulam in basi rectangulâ $AMFO$ per eandem $AO$ resectam in eadem ratione.

II. Si parabola circa basin $OF$ rotetur, factâ $AO: c$, erit $QO: c - x$, & ratio solidi, hac ratione geniti ad cylindrum ea, quæ est omnium $yc - yx$ (§. 27.) ad omnia $bc - bx$, quæ & ungularum semiquadrantalium per $OF$ resectarum in respectivis basibus $AFO$, & $AMFO$ (§. 10.) exponentes sunt; ergo omnia $yc - yx$ ad omnia $bc - bx$, ut omnia

$$cr^{\frac{p-q}{p}} x^{\frac{q}{p}} - r^{\frac{p-q}{p}} x^{\frac{p+q}{p}} \text{ ad omn. } bc - bx;$$

hoc est per §. 11. Capitis II. ut $2pp$ ad $2pp + 3pq + qq$, ita ungula ad ungulam, aut solidum ad cylindrum.

III. Si circa $AM$ basi in vertice parallelam revolvatur, erit solidum ad cylindrum circumscriptum, aut ungula semiquadrantalis resecta per eandem $AM$ in basi parabolicâ ad similem ungulam in basi rectangulâ $AMFO$ (juxta §. 26. & 9.) ut omnia $yx$ ad omnia $bx$, seu ut omnia $r^{\frac{p-q}{p}} x^{\frac{p+q}{p}}$ ad totidem $bx$, hoc est ut $2p$ ad $2p + q$.

IV. Si circa $MF$ axi parallelam fiat rotatio,

tio, erit solidum hoc modo productum in ratione ad cylindrum, ut omnes differentiæ quadratorum in QK, & DK, seu omnia $2by - yy$ ad omnia $bb$, hoc est ut omnia $2br \frac{p-q}{p} x \frac{q}{p} - r \frac{2p-2q}{p} x \frac{2q}{p}$ ad omnia $bb$, adeoque ut $\frac{2p}{p+q} - \frac{p}{p+2p}$ ad 1. consequentia ex loco citato nullo negotio colligitur.

§. 29. Et hæc de parabolis; quæ si $q$ sit major quam $p$ ad earum complementa A F *M* referri possunt; sin autem $q$ signo negativo afficiatur, erit curvæ æquatio ad asymtotos hyperbolæ; quarum solida simili modo genita & hinc dimensionem, determinationem saltem, accipiunt.

§. 30. Sit *Fig. XLV.* polo *M*, normâ *D Q*, vertice A, descripta conchöis A *B C*; item radio A *D* seu $r$ descriptus circuli quadrans A *D I* vocenturque *D* M: $s$, *G D*: $z$, *G B*: $x$, *H G*: $y$, erit juxta Cap. præc. §. 36. conchoidis proprietas $sy + zy = xz$.

Adeoq. juxta §. 27. solidum ex quadrante circuli A *D I* circa *Z* M (quæ normæ æquidistat) rotato, seu omnia $sz + zy$ æquale solido infinito ex spatio conchöidali circa normam *D Q* in infinitum productam rotato seu omnibus $xz$.

Tum

Tum &, juxta §. 10. erit truncus inferior cylindrici quadranti *ADI* insistentis, ac per *MZ* seminormaliter resecti, seu omnia $sy + zy$, æqualis ungulæ in basi infinitâ conchoidali per infinitam *DQ* seminormaliter resectæ seu omnibus $xz$.

§. 31. Sit (*Fig*: *XIII*. *N*°. 1.) semicirculus *ADO*, cujus diameter *AO*: $r$, Q*A*: $x$, Q*O*: $l$ seu $r - x$, *D*Q: $y$; item hunc spectans cissois *ANKG*, cujus applicata Q*N*: $z$; erit, juxta calculum §. 31. Cap. de tangentibus, æquatio curvæ cissoidis $lz = xy$; unde ex §. 26. solidum ex cissoidali spatio circa infinitam asymtoton O*R* voluto, seu omnia $lz$, æquantur solido ex semicirculo circa *AF* asymtato O*R* parallelam rotato seu omnibus $yx$; aut juxta §. 9. ungula semiquadrantalis in basi cissoidali per O*R* infinitam resectæ, seu omnia $lz$, æqualis simili ungulæ in semicirculo per *AF* resectæ, seu omnia $yx$.

§. 32. Quomodo autem hinc solidorum transmutationes plurimæ levi operâ obtineantur, facile quivis animadvertit. Resumtâ enim *Fig*. *XXXIX*. symbolisque §. 17, Cap. præced. suppositis, cum sit perpetuo $ye = ta$, hoc est, posito *T*Q in *IM*, spatium *A*O*F* æquale spatio F*K*O, erit & si utrumque in $y$ ducatur,

$yye$

$yye = tya$; unde omnia $\frac{yye}{2}$ seu ungula cylindrici in basi $AFO$ per $AO$ seminormaliter resecti (§. 7.) ad $tya$, seu truncum inferiorem cylindrici in basi $FKO$ per eandem $AO$ seminormaliter resecti (§. 9.) ut omn. $\frac{yye}{2}$ ad omn. $tya$ seu omn. $yye$ hoc est ut 1 ad 2.

Tum etiam omn. $\frac{yyec}{2r}$ seu per §. 17. solidum ex $AOF$ circa $AO$ rotato ad $\frac{taye}{r}$ juxta §. 25. solidum ex $FKO$ circa eandem $AO$ revoluto, ut omn. $\frac{yyec}{2r}$ ad omn. $\frac{tayc}{r}$ seu omn. $\frac{yyec}{r}$ hoc est ut 1. ad 2.

Si vero $IM$ vocetur $h$, fiatque semper $ty = hh$, erunt omnia $\frac{tayc}{r}$ = omnia $\frac{hhac}{r}$ = $\frac{yyec}{r}$; & omnia $\frac{hhac}{2r}$ = omnia $\frac{yyec}{2r}$, hoc est solidum ex $FKO$ circa $FO$ æquale solido ex $AFO$ circa $AO$, secundum §. 17; quod ungulis superiori modo applicari potest. Quin & assumtâ *Fig. XL.* si recta $\alpha\delta\iota\varphi$ respondeat curvæ *Fig. XXXIX.* $ADEF$, fiatque $\iota\delta$ = QD seu $y$, ac $IM = TD$ seu $s$, erat $yu = sa$, quare $yyu = sya$ hoc est $\frac{yyuc}{2r} = \frac{syac}{2r}$, seu solidum

ex $\alpha\circ\varphi$ circa $\alpha\varphi$ (§: 17.) æquale semisolido ex *FOK* circa *OA* rotato; quod & ungulis, si placuerit, applicetur.

§. 33. Sit *Fig. LXIII.* $BK = BF$, & *BA* semper æqualis *BC* seu *x* interceptæ, angulus *KBF* rectus, applicata $AE:y$, & $CD:z$, fiatque solidum ex *FDB* circa *FB*, seu omnia $\frac{zzc}{2r}$ §. 19. æquale solido ex *BKL* circa *BN*, seu omnibus $\frac{yxc}{r}$ §. 26. erit æquatione constitutâ $\frac{zz}{2} = yx$, hoc est juxta §. 7. & 9. ungula semiquadrantalis cylindrici in basi F*DB* per F*B* resecti æqualis ungulæ cylindrici in basi K*BL* per *BN* seminormaliter resecti; unde posito *y* ad locum quemlibet, cujus applicata *x*, innotescet *z*, & contra.

§. 34. Sint (F*ig. LXIV.*) FK, *RM*, *PN*, normales ipsi F*N*; vocenturq. *FC* & $NP:r$, $CN:b$, intercepta *NS* & huic semper æqualis $BC:x$, $BA:y$, $ES:z$, unde $EG:2z$, constitutâque æquatione qualibet, juxta §.os: 7. & 9. verbi gratia. $yx = 2bz$, erit juxta §. 9. $yx$ ad ungulam semiquadrantalem in basi *F*K*C*, per *CM* resecta; & $2bz$, ad cylindricum in basi *HNL*, cujus altitudo *CN* seu *b*, est enim $2bz = b$ in $2z$, unde illa ungula huic æquatur cylindrico.

§. 35. Quod si $yx$ ponatur ad solidum rotundum, & fiat $\frac{yxc}{r} = \frac{2bzc}{r}$; erit solidum ex $FKC$ circa $RM$ rotatum æquale cylindrico, cujus basis $HNL$ seu omnia $2z$, & altitudo $\frac{bc}{r}$, seu circumferentia circuli radio $CN$ descripti.

*Coroll. I.* Posito hinc $y$ ad locum quemlibet, noscitur locus ad $z$, & vicissim; verbi gratiâ, sit $y$ ad semicirculum, ut sit, $yy = 2rx - xx$, erit, facto $2b = r$, hoc in casu $zz = \frac{2rx^3 - x^4}{rr}$; adeoq. juxta §. 34. ungula in semicirculo per $CM$ seminormaliter resecta, seu omnia $yx$, æqualis cylindrico in basi $PNL$, cujus altitudo $r$. Notetur ungulam in basi $PNL$ per $NP$ seminormaliter resectam, seu omnia $\frac{zz}{2} = \frac{2rx^3 - x^4}{2rr}$ cubari posse, juxta Coroll. VII. §. 11. Cap. præc.

*Coroll. II.* Cum vero sit $yx = 2bz$, erit $\frac{yx}{b} = 2z$, unde posito $y$ ad quemlibet locum, cujus intercepta $x$, ductâque curva $FTC$, cujus applicata $BT$ sit $\frac{yx}{b}$, erit spatium $FTC$

seu omnia $\frac{yx}{b}$ æquale plano curvilineo *HNL*, seu omnibus $2z$.

§. 36. Similia plura transmutationum specimnia sibi quilibet pro arbitrio cudet; retentis enim linearum nominibus, fiat $4bz = yy$ seu $\frac{yy}{2} = 2bz$; adeoque cylindricus in basi *HNL*, cujus altitudo $b$, æqualis ungulæ semiquadrantali in basi F*KC* per *FC* resectæ; quod factis $\frac{yyc}{2r} = \frac{2bzc}{r}$ ad solida rotunda referri in modum præcedentium potest.

*Coroll. I.* Ponatur $y$ ad semicirculum, erit $yy = 2rx - xx = 4bz$; & locus ipsius $z$ ad curvam, cujus spatium juxta Cor. IV. §. 11 Cap. præc. est quadrabile, nam, facto $4b = r$, erit $2x - \frac{xx}{r} = z$; adeoq. cylindricus in basi *HNL* cubationem admittit, qui æqualis est nngulæ cylindrici in basi semicirculari per diametrum seminormaliter resectæ, unde & hæc ungula cubari potest.

§. 37. Affinis hisce est methodus, qua solvitur hoc problema, datis *Fig. LXV.* duobus spatiis, *A*F*O* & *AOM*, invenire duo solida in ratione harum Figurarum.

Factis *DQ*: $y$, & *QS*: $z$, erit spatium *AFO* ad spatium *AOM*, ut omnia $y$ ad omnia

nia $z$; & assumtâ $b$ determinatâ, ut omnia $by$ ad omnia $bz$; si jam expetantur solida conoidica, reducantur $by$ & $bz$ ad circulos, ac fiat $by = \frac{kkc}{2r}$, & $bz = \frac{hhc}{2r}$, erit, sepositâ ratione $\frac{c}{2r}$, applicata $TQ$ seu $k = \sqrt{by}$, & $QN$ seu $h = \sqrt{bz}$; & solidum ex $AGO$ circa $AO$ seu omnia $\frac{kkc}{2r}$ ad solidum ex $AOL$ circa eandem $AO$ seu omnia $\frac{hhc}{2r}$, ut spatium $AFO$ seu omnia $y$ ad spatium $AMO$ seu omnia $z$; unde posito $AQ: x$, & $yy = 2rx - xx$, erit $k^4 = 2bbrx - bbxx$; &, dato loco ipsius $z$, innotescet curvæ $ANL$ proprietas, cum sit $hh = bz$.

Si quis autem malit solida tubulata seu annularia: detur circa axem $AO$ Figura $AGL$, cujus applicatæ $QN = TQ = z$; item alia $AFM$, cujus applicatæ $QS = DQ = y$, erit Figura prima ad secundam ut omnia $z$ ad omnia $y$, seu assumtâ $b$ determinatâ, & $r$ pro numero, ut omnia $rbz$ ad omnia $rby$; quorum utrumque si reducatur ad armillas seu quadratorum differentias pro acquirendis solidis annularibus juxta §. 20. fiatq. $rbz = kk - hh$, & $rby = ff - uu$, erit $hh = kk - rbz$, & $uu = ff - rby$. Cum autem, tum $hh$, tum $uu$

ſint quadrata rationalia, oportet quoque ut ipſorum valores $kk - rbz$ & $ff - rby$ rationali radice gaudeant; quare aſſumtâ quadrati $kk - rbz$ radice $k - td$ erit $k = \frac{rbz + ttdd}{2td}$; ac ſuppoſito quadratum $ff - rby$ provenire a radice $f - ſc$, emerget $f = \frac{rby + ssc c}{2sc}$; quo vero tum $k$ tum $f$ á fractionibus liberentur, factis $r = 4$, item $s = t = 2$, ac $b = c = d$, evadet $k = z + b$, & $f = y + b$; unde emergit $h = z - b$, aut $b - z$, nec non $u = y - b$ aut $b - y$. Ducta igitur $AH$ ipſi $FM$ parallela vocetur $b$, completoque $AOKH$ rectangulo, erit ſemper ducta quavis ipſi $FK$ æquidiſtanti recta $DI = b + y$ & $IS = b - y$, unde ſemper armilla ex $DS$ circa $HK$, ſeu quadratorum in $DI$ & $SI$ differentia æqualitur $4by$, & ſolidum ex ſpatio $AFM$ circa $HK$ rotato = omnia $4by$: eodem modo invenietur ſolidum ex $AGL$ circa eandem $HK$ = omnia $4bz$. Adeoque patet hic ab aliis, alio tamen modo demonſtratus canon.

Si circa axem $AO$ duo quæcunque conſtituantur ſpatia $AFM$ & $AGL$, fiatque ductâ $AH$ ipſi $MO$ parallelâ quodlibet rectangulum $AOKH$; erit, ut prima Figura ad ſecundam, ſeu ut omnia $y$ ad omnia $z$, ita ſolidum

ex

ex Figura prima circa *H* K rotata, ad solidum ex Figura secunda circa eandem *H* K.

*Coroll. I.* Quod si *A G L* sit spatium mensurabile, & *A* F *M* rectangulum ipsi *A G L* circumscriptum; erit tubus ex hoc rectangulo circa *H K* rotato ad solidum ex *A G L* circa eandem, in ratione rectanguli circumscripti ad spatium *A G L*; cujus ideo solidi datur ratio ad cylindrum, cum spatii *A G L* ad rectangulum circumscriptum ratio sit nota ex hypothesi.

*Coroll. II.* Cum autem, juxta Cor. I. §. 18. Cap. præc. ex quâlibet curvâ infinita curvilinea cognitæ magnitudinis ortum ducant, per hanc infinita ergo solida quorum ratio ad cylindrum nota erit, ex singulis curvis, juxta præc. Coroll. exhiberi poterunt.

§. 38. Nescio an operæ sit pretium hic aperire fontes, qui Mathematicorum libros immensâ theorematum serie jam olim inundaverunt; cum cuilibet per præcedentia satis innotescant. In tyronum tamen gratiam unum aut alterum specimen addo.

Datum (*Fig. LXVI.*) spatium *B D C* (cujus applicata F *E*: *y*) rotetur circa rectam *T A S*, ipsi F *E* normalem; voceturq. *A E*: *d*, solidum ea rotatione genitum juxta §. 20. explicabitur per omnium quadratorum in F *A* & *E A* constitutorum differentias, seu omnia

$\frac{2dyc+yyc}{2r}$, si vero in basi *BCD* elevetur cylindricus, cujus altitudo F*K* vocetur *h*, & qui secetur plano *HA* per *TAS* transeunti, ita ut *AG* sit: *b*, truncus inferior algebraicè exponetur juxta §. 5. per omnia trapezia *P*F*EQ* seu omnia $\frac{2dyb+yyh}{2b}$; qui truncus ergo erit ad solidum rotatione genitum, ut omnia $\frac{2dyb+yyh}{2b}$ ad omnia $\frac{2dyc+yyc}{2r}$, hoc est, ut *h* seu altitudo cylindrici ad $\frac{bc}{r}$ seu circumferentiam in radio *GA* seu *b*: vel posito $h=b$, aut angulo *HAG* semirecto, ut *r* ad *c*, seu ut radius circuli ad peripheriam.

§. 39. Hinc assumto, in Figura LXVII. spatio altero *DBC*; cæterisque, quæ tum rotationem tum trunci sectionem spectant, factis, ut in præcedenti; vocentur *AE*: *z*, F*E*: *x*, altitudo F K: *s*, *GA*: *g*; erit juxta præcedentem truncus inferior ad solidum tubulatum ut omnia $\frac{2zxs+xxs}{2g}$ ad omnia $\frac{2zxc+xxc}{2r}$, seu ut *s* ad $\frac{gc}{r}$; unde, vocato trunco in Fig. *LXVI*: *t*, in Fig. L*XVII*: *p*, solido rotundo in Fig. L*XVI*: *f*, in *Fig*. L*XVII*: *l*, factoque $\frac{bc}{r}=q$

*gc*

$\frac{gc}{r} = n$, erit juxta §. 38. $t:f::b:q$. & quoque $p:l::s:n$; unde solidorum quorumvis annularium ratio $f:l:: \frac{qt}{b} : \frac{pn}{s} :: \frac{bt}{b} : \frac{gp}{s}$; truncorum autem ratio $t:p:: \frac{bf}{q} : \frac{ls}{n} :: \frac{bf}{b} : \frac{ls}{g}$; quæ fusius demonstrata apud alios videantur.

§. 40. Reassumto schemate XLII. ac symbolis, tum §. 24. tum §. 37. Cap. II. adhibitis, oportet solidum rotundum verb. gr. ex curvilineo *AZP* circa *AP* rotato genitum efformare, quod æquale est, solido cuicunque rotundo per quamlibet expressionem analyticam designato.

*Casus*, ubi solidum datum mediantibus rectis, ad curvilineum cognitum *APE* pertinentibus, explicatur. Sit ergo describendum, posito $Q3 = b$, solidum ex *APZ* circa *AP* rotato (seu, juxta §. 18. omnia $\frac{chbe}{2r}$) æquale cono, ex triangulo *TDQ* circa *TP* rotato, seu $\frac{cyyt}{6r}$; erit ex §. 13. Cap. II. omnia $\frac{chbe}{2r}$ = omnib. $\frac{cyye + cyyi + 2ctya}{6r}$ seu terminis ipsius $\frac{cyyt}{2r}$ infinitesimalibus, adeoque, divisione facta per $\frac{c}{2r}$ erit $3hhe = yye + yyi + 2tya$;

$+ 2tya$; ex qua æquatione ejectis, methodo §. 31. Cap. II. traditâ, infinitesimis, ipsa $h$ per lineas cognitas designabitur, calculum hic omitto, cum post Cap. II. §. 31. & 37. ritè intellectas sponte sequatur.

§. 41. Neque semper requiritur, ut curvilineum quæsitum ad $AP$ applicetur; verum & ad quascunque rectas curvam $ADE$ spectantes ordinari potest.

Quæratur, exempli gratiâ, curvilineum $A8FB$ ad tangentis abscissam $AB$ applicatum, quod rotatione sui circa eandem $AB$ efficiat solidum æquale cono modo exposito $\frac{cyyt}{2r}$; positâ $T8 = h$, ac $BT = i$, erit hoc solidum $=$ omn. $\frac{chhi}{2r}$, juxta §. 18, adeoque sumendo ipsius $\frac{cyyt}{2r}$ partes infinitesimas, ac divisione per $\frac{c}{2r}$ institutâ, erit $3hhi = yye + yyi + 2tya$; unde ad modum Cap. II. §. 31. & 38. eliminatis infinitesimis, applicata $h$ innotescet; quæ ordinariâ methodo ad interceptam $AT$ reducta, curvilinei $A8FB$ æquationem exhibebit.

Simile in Figuris planis exemplum Cap. II. §. 38. suppeditat.

§. 42. Quin & eadem, quam in Figuris planis Cap. II. §. 39. demonstravimus, etiam in solidis generalis methodus obtinet, retentis enim

enim inibi assumtis symbolis quæratur solidum, ex $APZ$ circa $AP$ rotato æquale cylindro, cujus basis est circulus radio $Q4$ seu $f$ descriptus, ac altitudo $Q5$ seu $z$, erunt omnia $\frac{bbce}{2r}$ æqualia $\frac{cffz}{2r}$; unde juxta Cap. II. §. 13. divisis omnibus per $\frac{c}{2r}$ erit $bbe = ff\mu + 2fz\theta$; jam cum juxta ibi tradita sit, $\theta = \frac{fe}{b}$ & $\mu = \frac{ze}{d}$ erit $bbe = \frac{ffze}{d} + \frac{2ffze}{b}$ & $bb = \frac{ffz}{d} + \frac{2ffz}{b}$;

Unde, $f$ & $z$ per quamlibet expressionem analyticam designatis, etiam $b$ per eandem respective exprimetur.

*Coroll.* Hinc eâdem operâ constat ratio, dato cuilibet solido $ffz$ ungulam truncumque æqualem constituendi; tum &, è converso, innumera solida rotunda ad cylindros, & truncos ungulasque ad cubos reducendi methodus.

§. 43. Quomodo jam, quæ §. 17. & 30. Cap. II. circa plana demonstravimus, etiam solidis accommodari queant, post levem attentionem in aperto est; assumta siquidem quâlibet hypothesi, $\frac{cbbe}{2r} = \frac{czzi}{2r} = \frac{cffu}{2r} = \frac{cgga}{2r}$ &c. habebuntur, post ejectas secundum §. 31. Cap. II. infinitesimas, duo solida sibi mutuo æqualia.

Nec

Nec brevitati consulentes integrum in singulis hisce calculum adjungere operæ duximus pretium, principia tradidisse contenti; nec quomodo hæc ad solida annularia seu tubulata, & truncos ungulasque referri queant, ulteriori hic discursu prosequor; cum modo prægressa §. 42. generaliter hæc omnia comprehendat. Hinc enim datâ cujuslibet solidi designatione in terminis quibuscunque algebräicis, solidum tum rotundum, tum ad ungulas truncosque pertinens exhiberi potest, cujus magnitudo per expositam expressionem analyticam est determinabilis; quin & non uno modo idem effici posse ex §. 41. manifestum est, cum pro variis, quibus ipsa *b* applicatur, infinitesimis constructio varia sit. Quod, licet spisso satis volumini opulentam materiam exhibeat, num etiam ab aliis, qui satis prolixè alioquin solidorum ex Curvilineis ortorum proprietates descripserunt, animadversum sit, nescio.



CA-

# CAPUT IV.

## *De superficierum, lineis Curvis insistentium, dimensionibus.*

§. 1. IN exposito Curvilineo *ADEOA*, *Fig. LXVIII.* si erigatur Cylindricus, cujus altitudo *A*$\alpha$: *r*, vocenturque, ut in superioribus, *QP*: *e*, *DE*: *u*, constabit superficies curva cylindrici curvæ *ADEO* normaliter insistens, propter basin infinitè polygonam, innumeris rectangulis *DE* $\delta$ *E* seu omnibur *ru*. ea vero, quæ insistit rectæ *A*O, omnibus seu totidem *re*; quare integra, demtis basibus, cylindrici superficies æquatur omnibus *ru* + *re*.

§. 2. Quod si cylindricus hic, *Fig. LXIX.* plano per *CB* transeunte in duos secetur truncos; ita ut *CT* sit: *b*, ac *TS*: *h*; constabit inferioris trunci superficies, quà parte rectæ *A*O superstat, innumeris rectangulis QI*GP*; hoc est (cum appellato *QC*: *d*, *QP*: *e*, sit *QI*: $\frac{dh}{b}$) omnibus $\frac{dhe}{b}$; quâ vero parte superficies curvæ *ADE*O insistit, constabit omnibus, trapeziis *DKNE*, hoc est (cum vocatis *QD*: *y*, *HE*: *a*, *DE*: *u*, *PE*: *y* + *a*, sit

sit $DK = \frac{db + yb}{b}$ & $EN = \frac{db + yb + ab}{b}$) omnibus $\frac{2dhu + 2yhu + ahu}{2b}$, hoc est, juxta lemmata 10. omnibus $\frac{dhu + yhu}{b}$, adeoq propter trianguli $NKM$ nullitatem omnibus rectangulis $MEDK$.

§. 3. Quod si fiat $h = b$, & angulus $TCS$ ideo semirectus, æquabitur trunci superficies curvæ $ADEO$ insistens omnibus $du + yu$.

§. 4. Sin autem non per $BC$, sed per $AO$ planum secans transeat, erit ungulæ plano $ADEOA$ insistentis superficies æqualis omnibus $yu$; hoc enim casu $QC$ seu $d$ ex hypothesi evanescit.

*Coroll. I.* Sit *Fig.* LXX. semicirculus $AEO$ centro F descriptus, ac radio F$D$: $r$; erit superficies ungulæ cylindrici per diametrum seminormaliter resecti, retentis iisdem symbolis, juxta præcedentem æqualis omnibus $yu$; cum autem sit $D$F: $DQ$:: $DE$: $DH$, seu $r:y::u:e$. erunt omnia $yu =$ omnia $re$, hoc est, facto $A$L $= D$F $= r$, erit ungulæ superficies æqualis rectangulo $A$L$M$O; adeoq. quadrabilis, tum integra, tum secundum partes proportionales, quod & in parabolâ obtinet, consulatur Cor. III. §. 11. seq.

§. 5. No-

§. 5. Notetur, non requiri ut linea *A*O necessario sit recta, factis enim, *Fig.* LXXI. Q*C*: $z$, & *CD*: $y$, *ST*: $h$, *TC*: $b$, infinitesimes *DE*: $u$, Q*P*: $i$; planum secans per *S C* & *C B* transeat; erit superficies trunci curvæ *ADE*O insistens æqualis omnibus $\frac{yhu}{b}$, illa vero, quæ curvam AQ*P*O pro basi habet, æquatur omnibus $\frac{bzi}{b}$, juxta §. 2. hujus, adeoque tota trunci superficies toti curvæ A*DE*O *P*QA superstans æquabitur omnibus $\frac{hyu+hzi}{b}$.

§. 6. Patet hinc, positâ $y$ curvæ cujuslibet applicatâ, ipsiusque curvæ infinitesimâ $= u$, ac $b$, $h$, $r$, $d$, lineis quibuscunque determinatis; curvæ insistentem superficiem cylindricam in altitudine $r$ designari per omnia $ru$; superficiem ungulæ semiquadrantalis per omnia $yu$; superficiem ungulæ cylindrici, ad angulum, quem ratio $b$ ad $h$ determinat, resecti per omnia $\frac{hyu}{b}$; trunci superficiem per omnia $\frac{hdu+hyu}{b}$ aut $du+yu$, prout angulus plani secantis vel semirectus vel alterius magnitudinis est, & sic in cæteris, quod modo traditis ritè intellectis satis manifestum est.

## *De Superficiebus rotatione Genitis.*

§. 7. RECtangulum A*BEP Fig. LVIII.* diagonali A*E* divisum, si rotetur circa axem A*P*, efficiet linea *BE* hac circumvolutione superficiem cylindricam B*EINM*; & linea A*E* superficiem conicam *EIM*A. Cujus utriusque valor Analyticus ut indagetur, circuli *EIM* utriusqne basin constituentis peripheria vocetur $c$; quæ si dividatur in partes infinitesimas, ut *GI*, quæ appellentur $u$, constabit superficies cylindrica infinitis rectangnlis LO*IG*, seu ( vocata A*P* = O*I*: $d$) innumeris $du$; ideoque totius cylindri superficies, juxta Cap. II. § 13. æquabitur $dc$.

§. 8. Conica autem superficies componetur infinitis triangulis isoscelibus *G*A*I*, quorum singula (vocatâ nimirum A*E* = A*I* = A*G*: $l$) erunt = $\frac{lu}{2}$, cum juxta lemni 33. sint rectangula ob basin *GI* infinite parvam, unde superficies modo dicta æquabitur omnibus $\frac{lu}{2}$; erit que juxta Cap. II. §. 13. absolutus ipsius valor = $\frac{lc}{2}$; seu triangulo rectangnlo, cujus unum latus est latus trianguli per axem coni, alterum circumferentia circuli basin constituentis.

§. 9. Ve-

§. 9. Verum & alius cylindricæ superficiei valor hoc pacto investigatur, non contemnendi usus in hoc calculi genere. Cylindrus, *Fig. LXXII.* ex rectangulo *AO*F*B* circa *AO* rotato constat infinitis cylindrulis ex Q*PED* circa Q*P*, unde superficies cylindri majoris ex infinitis superficieculis cylindricis ex *DE* circa Q*P* rotata genitis: talis autem superficiecula, factâ *PE*: *p*, & *DE*: *e* infinitesimâ rectæ *BF* seu *A*O, æquabitur $\frac{pec}{r}$, positâ radii ad circumferentiam ratione ut *r* ad *c*; unde tota cylindri superficies erit æqualis omnibus $\frac{pec}{r}$, tam secundum conversionem integram, quam partialem.

§. 10. Conoides *Fig. LIX.* ex Figura *AF*O circa *A*O rotata, juxta 17. Cap. præc:, infinitis constat conis truncatis, ex trapeziis Q*DPE* circa Q*P* volutis; quorum singulorum superficieculæ efficiuntur respectivis rectulis *DE* circa eandem Q*P* rotatis; unde patet omnes has conorum truncatorum superficieculas simul sumtas æquare superficiem conoidicam ex omnibus rectulis *AD*, *DE*, *EF* &c. hoc est ex integrâ Curvâ *ADE*F circa *A*O rotatâ.

§. 11. Ut vero inveniatur ejus modi superficieculæ valor, factis *D*Q: *y*, *TD*: *s*, cui tangenti sit normalis *DR*: *k*, tum *EH*: *a*,

 *DE*: *u*,

$DE:u$, & ratione radii ad circumferentiam ut $r$ ad $c$, erit circumferentia radio $QD$ descripta $= \frac{cy}{r}$, quæ ducta in $\frac{1}{2}TD$ dat $\frac{cys}{2r}$ pro superficie coni ex $TDQ$ circa $TQ$ rotati; uti ex prægresso §. 8. notum est. Eandem ob rationem superficies coni ex triangulo $TPE$ circa $TP$ converso æquabitur $\frac{cy+ca}{r}$ in $\frac{s+u}{2}$, seu (eliminatis per lemma, 10. rejectaneis) $\frac{cys+cyu+cas}{2r}$; unde si detrahas $\frac{cys}{2r}$, remanet coni truncati superficies ex $DE$ circa $PQ$ $= \frac{csa+cyu}{2r}$.

Cum vero ob tangentem $TD$ sit perpetuo $yu = sa = ke$, erit singularum superficieculanum valor $= \frac{cyu}{r} = \frac{csa}{r} = \frac{cke}{r}$; quare tota superficies ex $AFO$ circa $AO$ rotata $=$ omnia $\frac{cyu}{r}$ $=$ omnia $\frac{csa}{r}$ $=$ omnia $\frac{cke}{r}$.

*Coroll. I.* Sit $AEO$ *Fig. LXX.* semicirculus centro $F$ descriptus, qui volvatur circa diametrum $AO$, quæritur hinc orta sphæræ superficies; vocatoq. radio $DF:r$, & $DQ:y$, æquabitur juxta modo insinuata omnibus $\frac{cyu}{r}$ $=$ omnibus $\frac{cre}{r}$ $=$ omnibus $ce$; est enim

$yu$

$yu = rc$, §. 4. Cor. I. sed omnia $ce$ efficient rectangulum *ALMO*, in quo, *A*O existente circuli diametro; *AL* æquatur ipsi $c$ seu peripheriæ; est autem hoc rectangulum $= 2rc = \frac{4rc}{2} =$ quadruplum majoris circuli in sphærâ exposita.

*Coroll. II.* Cum autem hoc æque in partibus analogis obtineat; superficies ex segmento *AD*Q circa *A*Q rotato, facto *A*Q: $x$, æquabitur ipsi $cx$, seu rectangulo ex *A*Q in circumferentiam integram maximi circuli in sphæra.

Quod si desiderentur circulus huic superficiei æqualis, sit radius: $z$, erit circulus $\frac{zzc}{2r} = cx$; adeoque $\sqrt{2rx} = AD = z =$ radius circuli quæsiti.

*Coroll. III.* Rotetur, *Fig. LXXIII.* linea parabolica *ADE* circa axem *AP*, vocenturq. *A*Q: $x$, Q*D*: $y$, *D*F tangenti normalis: $k$, erit genita hinc superficies ex præc. $=$ omnia $\frac{cuy}{r} = \frac{cke}{r}$; quod si $k$ seu *DF* applicetur ad Q*P* seu $e$, adeoque ad *A*Q seu $x$; erit $\frac{1}{4}rr + rx = kk$; adeoque curva *SLCM* erit eadem parabola & $SA = \frac{1}{4}r$; unde omnia $ke$ seu spatium *ALMP* cognitum est, &

æquale superficiei ungulæ cylindrici in basi *APE* per *AP* seminormalitor resecti; vocetur hoc $n$, erit ideo superficies conoidis parabolici $= \frac{cn}{r}$; cui æquatur circulus radio $\sqrt{2n}$ descriptus.

*Coroll. IV.* Eodem modo res in cæteris curvis peragitur; si *ADE* sit hyperbola (cujus æquatio $2rx + xx = yy$) erit $k$ ad hyperbolæ alterius segmentum *ALMP*; cujus æquatio $rr + 4rx + 2xx = kk$; sit hoc segmentum $= n$; erit $\sqrt{2n}$, radius circuli æqualis superficiei conoidis hyperbolici.

§. 12. Quod si rotationis axis *LM*, *Fig. LXX.* sit extra Figuræ *ADEO* ambitum; factâ *QN*: $d$, determinatâ; *QD*: $y$, & *DE*: $u$, constabit superficies ex curva *ADEO* circa *LM* conversa, omnibus, $\frac{duc + yuc}{r}$; quod coincidentem *DE* ultra *T* producendo, donec cum *LM* concurrat, ac eodem cum §. 11. calculo patefiet.

§. 13. Si vero inquiratur, *Fig. LXXI.*, superficies ex integrâ Figuræ *ADEOPQA* peripheriâ circa *BC* rotatâ, sint infinitesimæ *DE*: $u$, *QP*: $i$, rectæ *CD*: $y$, *QC*: $z$, erit eadem

eadem æqualis omnibus $\frac{yuc + zic}{r}$, consequentiæ ratio jam sæpius inculcata est.

§. 14. Plurima hinc in modum §. 38. & 39. Cap. præc. deduci possent; cum, juxta §. 2. hujus, superficies trunci inferioris cylindrici in altitudine *ST* seu *h*, per planum *BC* (ita ut *TC* sit $= b$) resecti constet omnibus $\frac{yuh + zib}{b}$ & superficies ex perimetro *ADEOPQA* circa *BC* rotatâ fit æqualis omnibus $\frac{yuc + zic}{r}$ per præced; erit illa superficies trunci ad hanc ut omnia $\frac{yuh + zib}{b}$ ad omnia $\frac{yuc + zic}{r}$ seu ut $h$ ad $\frac{hc}{r}$.

Unde in truncorum ac solidorum rotatione genitorum superficiebus idem obtinet ac in eorum solidis. Conferantur hæc cum §. 38, 39. Cap. præcedent.

§. 15. Cæteræ vero, quæ ordinatio circumferuntur propositiones, facili hinc negotio eruuntur. Resumtis enim schematibus *XXXIX* & *XL* ac symbolis §. 17. Cap. II. cum superficies conoidalis ex curva *ADEF* circa *AO* conversa sit, juxta §. 11. Hujus, æqualis omnibus $\frac{cuy}{r} =$ omnib. $\frac{c+a}{r} =$ omnib. $\frac{cxe}{r}$; erit *Primo*, ut $r$ ad $c$

 seu

seu radius ad circumferentiam ita omnia $uy$ seu superficies curva ungulæ cylindrici plano $AFO$ insistentis ac per $AO$ semihorizontaliter resecti, juxta 4 hujus, ad omnia $\frac{cuy}{r}$ seu superficiem conoidalem ex $ADEF$ circa $AO$.

*Secundo*, positâ $ADEF$ in directum, ut sit $DQ = \partial x = y$, $DE = \partial h = u$, planum $\alpha\varphi$ æquale omnibus $uy$; & positâ $DT$ seu $s$ continuo in $IM$, erit $FKO$ æqualis omnibus $sa$; nec non, $DR$ constitutâ semper in $QC$, Figura $ASO$ æquabitur omnibus $ke$. Unde generaliter: ut $r$ ad $c$, seu radius ad peripheriam, ita quodlibet ex planis $\alpha\varphi$, $FKO$ $ASO$ seu omnia $uy$, aut $sa$, aut $ke$, ad superficiem conoidalem ex $ADEF$ circa $AO$, hoc est omnia $\frac{cuy}{r}$ seu $\frac{csa}{r}$ seu $\frac{cke}{r}$.

§. 16. Hoc addam; si Conöidalis superficies per omnia $\frac{kec}{r}$ explicetur; & figuræ $AFO$ circumscribatur rectangulum $AVFO$, ac fiat $AV = p$; fore omnia $\frac{pec}{r}$ seu superficiem cylindricam rectanguli $AVFO$ circa $AO$ rotatione genitam ad omnia $\frac{kec}{r}$ seu superficiem conoidalem ex $AFO$ circa $AO$ volutâ productam, ut omnia $pe$, ad omnia $ke$, seu ut

rec-

rectangulum $AVFO$ ad planum $ASO$.

§. 17. Quo vero pacto immensa propositionum messis hinc colligatur, hoc exemplo tyronibus aperire liceat. Retentis symbolis, vocentur $AQ$, cui æqualis $DX$: $x$, & $AO$: $q$; fiatque juxta sæpius jam inculcata $t : s :: e : u :: p : z$, unde $ze = pu$. Facto ergo constanter $QC = z$, erit planum $ASO =$ omnia $ze$; si autem $p$ & $e$ in analogismo sint quantitates permanentes ac immutabiles, quia fuit ut $p : z :: e : u$. Erit & $pe : ze :: e : u$; &, ductis consequentibus in $\frac{cx}{r}$, ut $pe : \frac{zexc}{r} :: e, \frac{xuc}{r}$, hoc est ut rectangulum $AVFO$ seu omnia $pe$, ad solidum ex $ASO$ circa $VG$ rotato seu omnia $\frac{zexc}{r}$, (§. 26. Cap. III.) ita omnia $e$ seu recta $AO$ ad omn. $\frac{xuc}{r}$ seu superficiem conoidalem ex $AEF$ circa $VG$ rotatâ, ex §. 11. hujus. Quod si antecedentes in idem $\frac{cx}{r}$ ducantur erit $\frac{pexc}{r} : \frac{zexc}{r} :: \frac{exc}{r} : \frac{xuc}{r}$, hoc est, ut cylindrus ex $AVFO$ circa $VG$, seu omnia $\frac{pexc}{r}$, ad solidum ex $ASO$ circa eandem $GV$, seu omnia $\frac{zexc}{r}$, ita omnia $\frac{xec}{r}$ seu $\frac{qqc}{2r}$, (quia omnia $xe = \frac{1}{2}qq$.)

ſeu circulus in radio $AO$ ſeu $q$ ad ſuperficiem conoidalem ex $AEF$ circa $VG$ ſeu omnia $\frac{xuc}{r}$, quod ablatâ per diviſionem ratione $\frac{c}{r}$ ad ungularum truncorumque ſuperficies transferri poteſt: ſed hæc omitto.

§. 18. Cum igitur, juxta §. 37. Coroll. II. Cap. III. infinitorum numero ſolidorum ratio ad cylindrum nota ſit, per hanc præcedentem quoque infinitarum numero ſuperficierum conöidicarum ad circulum ratio innoteſcet, ſi ex data curva $ACS$ inveniri poſſit æquatio curvæ curvæ $AEF$.

§. 19. Reſumtâ *Fig. XI.* ſit $QD: y$, $AQ: x$, ſubnormalis $QS: l$; erit circulus radio $DQ$ deſcriptus $= \frac{yyc}{2r}$, cui oportet ſuperficiem conöidicam æqualem ex curvæ $ANK$ circa eundem axem $AP$ rotatione genitam, aſſignare. Sit eum in finem $QN: f$, tangens $NL: k$, ſubtangens $LQ: h$, curvæ normalis $NS: n$, infiniteſima $NK: o$, erit juxta §. 11. dicta ſuperficies $=$ omnia $\frac{foc}{r}$; quæ æquanda eſt circulo $\frac{yyc}{2r}$ $=$ omnia $\frac{yac}{r}$ ex §. 13. Cap. II. adeoque, diviſis omnibus per $\frac{c}{r}$, fiet. $fo = ya$; ſed, quia

$h:k::$

$h:k::e:o$, est $o = \frac{ke}{h}$; tum etiam est $ya = le$; adeoque $\frac{fke}{h} = le$ & $l = \frac{fk}{h} = n$.

Unde hic consequitur canon: Si duarum curvarum *ADE* & *ANK*, ad eundem axem *AP* ordinatarum, ea sit relatio, ut illius subnormalis *QS* hujus normali *NS* perpetuo adæquetur, erit superficies ex hujus curvæ *ANK* rotatione circa axem *AP* genita, semper æqualis circulo, qui applicatâ *DQ* alterius curvæ, tanquam radio, describitur.

*Coroll. I.* Sit *QN* ad circulum, cujus æquatio $2rx - xx = ff$; & *QD* ad parabolam, cujus æquatio $2rx = yy$; erit pars superficiei sphæricæ semper æqualis circulo, qui applicatâ parabolæ in eodem axis puncto *Q*, tanquam radio, descriptus est seu $= \frac{yyc}{2r} = cx$; unde posito $x = 2r$ erit integra superficies $= 2rc =$ quadruplum circuli maximi in sphæra, cujus radius $r$, peripheria: $c$; cum inter circulum hunc & parabolam requisita relatio obtineat.

*Coroll. II.* Patet hinc, datâ methodo subnormalium inversâ, dari omnium superficierum conoidicarum ad circulos reductionem.

*Cor. III.* Posset & hoc principio subnormalem *NS* per $x$ expressam in seriem resolvendo non

paucarum superficierum ratio ad circulum (in praxi satis accuratè) determinari.

*Schol.* Licet autem de planis & solidis tractantes methodum tradiderimus, dato cuilibet plano solidoque per analyticam quamcunque expressionem designato, curvilineum, truncumq. æqualem exhibendi, problema hoc circa superficies non æque feliciter solvitur, hâc quidem de causâ, quod methodum normalium seu, quod eodem recidit, tangentium inversam requirat; potuissetque superficierum, quæ corpora conica determinant, tractatio ulterius longè extendi; cum modis variis, præter jam recensitos, formari, adeoque mensurationis suæ diversa à modo traditis principia admittere possint: cum tamen ex eodem cum præcedentibus fundamento originem ducant, juxta quod curvilinea tanquam infinitorum laterum polygona considerantur, specialem magis horum inquisitionem curiosorum studio relinquimus. Elegans exemplum suppeditat Erudit. *Barrovii* Lect. XII. appendicula II.



CA-

# CAPUT V.

## *De Curvarum dimensionibus.*

§. 1. Ex lemmate 26. curva *ADEF Fig. XXXIX.* constat rectulis infinitis, *FE*, *ED*, &c. simul sumtis, seu omnibus $u$; quorum valor ut reperiatur, manentibus §. 17. Cap. II. symbolis, noti sunt, propter tangentem *TD*, eique normalem *DR*, sequentes analogismi, qui exhibent $u = \frac{ke}{y} = \frac{se}{t} = \frac{te+le}{s} = \frac{sa}{y} = \frac{ka}{l} = \frac{ka+la}{k}$.

§. 2. Hinc ergo curva *ADEF*, seu omnia $u$, aequantur omnibus $\frac{ke}{y}$, cum sit $y : k :: e : u$; unde, cum $e$ sibi semper aequalis supponi possit, si & $y$ talis foret, esset ut omnia $y$ ad omnia $k$ ita omnia $e$ ad curvam seu omnia $u$. haec autem immutabilitatis conditio cum in denominatore $y$ desideretur, factâ $r$ determinatâ, fiat $\frac{z}{r} = \frac{k}{y}$ unde $\frac{ze}{r} = u$, jam positâ $z$ in *QC* ad curvam *ACBS*, erit, factâ *AG* = $r$, ut omnia $r$ seu rectangulum *AGSO* ad omnia $z$ seu spatium *ASO*, ita omnia $e$ seu axis *AO* ad omnia $u$ seu curvam *ADEF*. Noscitur autem

tem locus ipsius $z$ ex Curvæ $ADEF$ relatione cognita & $r$ determinatâ. Quare dato spa. $ABSO$ seu omnibus $z$ datur curvæ $ADEF$ ratio ad axem suum $AO$.

Notari potest, quia $ze = ru$, fore $\frac{ze}{r} = u$; hoc est, curvam seu omnia $u$, æquari spatio $ASO$ per $r$ determinatam diviso, seu $\frac{\text{omnibus } ze}{r}$

*Coroll. I.* Quo vero hac methodo indagetur, num paraboliformium quædam ad mensuram possit revocari, sit curvæ $ADEF$ æquatio $r^{p-q}x^q = y^p$, erit ex tangentium methodo $TQ$ seu $t = \frac{px}{q}$, unde $QR$ seu $h = \frac{qyy}{px}$, & $kk$ seu quadratum $DR = yy + \frac{qqy^4}{ppxx}$. Jam vero, cum sit $kk : yy :: zz : rr$, erit, posito pro $kk$ invento valore, ac eliso $yy$ per æquationem curvæ, hæcce curvæ $ASO$ proprietas

$$zz - rr \text{ in } \frac{pp}{qq} r^{\frac{2q-4p}{p}} = x^{\frac{2q-2p}{p}};$$

unde si dimensiones ipsius $x$ sint $\frac{1}{f}$, erit curvilineum $ASO$ ex Cap. II. §. 11. Coroll. semper mensurabile; fiat ergo $\frac{2q-2p}{p} = \frac{1}{f}$, erit

erit $q = \frac{p + 2pf}{2f}$, & $q : p :: \frac{2pf + p}{2f} : p :: 2f + 1 : 2f$, seu ut numerus impar ad numerum proximè minorem. Observetur, cum $q$ hic major sit ipsâ $p$, semper $r$ adhæsuram ipsi $y$; sed hæc nihil habent difficultatis.

*Coroll. II.* Sit *Fig. LXXIV.* cyclöis (cujus dimensionem hisce cognatam hic adjungo) primaria A*DEG*, cujus axis AF: $2r$, A*C*F semicirculus genitor, vocenturq. AQ: $x$, Q*C*: $y$, *CF*: $h$, *DB*: $s$, quæ cycloidi normalis est, & *D*Q: $f$, *DE*: $u$, *DH*: $e$; erit ex §. 60. Cap. I. $s : f :: h : y :: u : e :: z : r$, unde omnia $ru$ = omnia $ze$; ponatur $z$ in QS, donec descripta sit curva *LSI*; cujus ut noscatur relatio, fuit $h : y :: z : r$, :: A*C*: AQ, seu $2rx : xx :: zz : rr$, unde $2r^3 = zzx$. Quare curva *ISL* ex hyperboliformibus una est & juxta Cap. II. §. 11. Coroll. 2. curvilineum *K*A*FLI* seu omnia $ze$ æquale $4rr$; adeoque omnia $u$, seu $\frac{\text{omnia } ze}{r}$, seu curva cycloidis = $4r$, hoc est duplo diametri circuli genitoris. Observetur hic, cum *K*AQ*I* seu quælibet pars spatii hyperboloidis cognita sit, etiam A*D* seu quamlibet curvæ partem hoc ipso notam esse.

§. 3. Addam & hoc a pluribus animadversum, cum absque lemmatum auxilio immedia-

tè

tè ex hoc calculo profluat. Sit *Fig. LXXV.* curva *ADE*F, eademque, quæ in §. 1. linearum symbola, erat $y:k::r:z::e:u$, unde $ze = ru$, quæritur jam (si $z$ ponatur in *QC* ad spatium curvæ *BCNG* ex hypothesi quadrabile) curvæ *ADE*F, quæ idcirco, ex §. 1. in rectam est mutabilis, proprietas; aut applicatæ *DQ* seu $y$ ad *AQ* seu $x$ relatio; cum itaque sit $y:k::r:z$, erit & $yy:kk-yy::rr:zz-rr$, & facto $zz-rr=ff$, erit quoque $y:k::r:f::e:a$, unde $fe=ra$; positis ergo $f$ in Q*X*, & $r$ in *IM*, est curvilineum *AX*X*O* = omnia $fe$, & rectangulum F*KLO* = omnia $ra$, quæ æquantur rectangulo dicto $ry$; quare *D*Q seu $y = \frac{omnia\ fe}{r} = \frac{spat.\ AXXO}{r}$.

Unde statim apparet sequens theorema: data Figura quadtabili *ABGQ*, cujus applicata Q*C* seu $z$, ad eundem axem applicetur secunda Figura *A*XX*O*, cujus applicata QX seu $f$; ita tamen, ut sit perpetuo $zz-rr=ff$; si deinde assumatur tertia Figura *A*F*O*, cujus applicata *D*Q seu $y$, ejus naturæ, ut ducta determinata $r$ in applicatam quamlibet *D*Q seu $y$, sit continuo rectangulum $ry$ æquale spatio curvilineo adjacenti. *A*XXQ seu omnibus $fe$, erit curva *A D E* F in rectam convertibilis, & æqua-

æqualis spatio primo assumto $ABGO$ diviso per $r$ determinatam.

*Coroll. I.* Sit $ABGO$ trapezium parabolicum, & $zz = rr + rx$, erit $ff = rx$, & $AXXO$ parabola, quæ, juxta Cap. II. §. 11. Cor. I, est mensurabilis & æqualis $\frac{2}{3}\sqrt{rx^3}$ = omnia $fe$. Cum autem sint omnia $fe = ry$, erit $\frac{2}{3}\sqrt{rx^3} = ry$, & $x^3 = \frac{9}{4}ryy$, quæ est æquatio curvæ ADEF.

*Coroll. II.* Hoc notetur, cum sit $ru = ze$ in quavis curvâ, datâ omnium curvilineorum quadratura, verb. gr. omnium $ze$, dari omnium curvarum longitudines seu omnia $u$.

§. 4. Hunc in modum, assumto quolibet omnium $u$ valore, proceditur; ex. gr. sit $u = \frac{ka}{l}$; fiatque, si $l$ seu Q$R$ Fig. XXXIX. sit quantitas mutabilis, $\frac{k}{l} = \frac{z}{r}$; erunt omnia $u$ = omnia $\frac{za}{r}$, hoc est, posito $z$ continuo in $IM$, spatium spatium FO$K$ seu omnia $za$ divisum per determinatam $r$, æquale omnibus $u$ seu curvæ A$D$F.

Quin & cum sit $za = ru$ erit spatium FO$K$ æquale rectangulo $\alpha\mu\omega\varphi$, Fig. XL. cujus alterum latus $\alpha\varphi$ curvæ, alterum $\varphi\omega$ determinatæ $r$ æquatur.

Quod

Quod ad quoslibet omnium $u$ valores §. 1. recensios quivis juxta superiorum normam accommodabit.

§. 5. Quo vero modo hæc methodus curvis, tum versus axem concavis applicari queat; tum & quo pacto, si curva non ad axem, sed ad punctum referatur, hæc tractanda sint; præcedentia intelligenti satis manifestum est.

In exemplum, repetatur *Fig. XLVIII.* sitque $DVSP$ eadem spiralis, quam Cap. II. prop. XLIX. Cor. 2. discussimus, talis nimirum, quæ circuli radios $BD$ ad eundem semper angulum secat; fiatque $SH = u$, tum vocatis $SF: s$, $SD: z$, $HI: a$, curvâ $DVS: c$, factâque constanti ratione ipsius $u$ ad $a$ eâ quæ est $b$ ad $q$, erit perpetuo $qu = ba$; quæ ad terminos absolutos per Cap. II. §. 13. reducta dabunt $qc = bz$; sed $b:q::s:z$, ergo $qs = bz = qc$, adeoque $s = c$, quod si $c$ extendatur ad infinitam spiralem, erit $GP = s$; unde infinita hæc spiralis ipsi $GP$ spiralem in puncto $P$ tangenti adæquatur.

§. 6. Sit *Fig. LXXVI.* curva $AZXDE$ constans infinitis rectulis $ED$, $DX$, $XZ$, &c. seu totidem $u$, quam contingat recta $BD$ in $E$; ipsæ autem curvam constituentes infinitesimæ productæ axem $BA$ intersecent in punctes $T$, $M$, $N$, $R$, &c. assumaturque $EO = DE$; item $VO =$

*D* I = *D K*, ut & *Z* 3, 1, = 2 X = X *Z*; continuando hoc modo, donec tandem ultima *K P* facta sit = 7, 8, = 9, 6, = 10, 5, = 11, 4, = *A* 4. Porro in triangulo *B E T*, ducta *C T*, fiat *C E* = *T E*; item in triangulo *T D M* ducta *M*, 12, fiat *D*, 12, = *D M*; sit & in triangulo *M X N* ducta *N*, 14, fiat X, 14, = X *N*; & sic in cæteris. Tandem facta *L C* = *T*, 12, nec non *D F* = 12, 13, = *M*, 14, in reliquis idem continuetur, donec fiat ultima, *G* I = 15, 8, = 16, 9, = 17, 10 = *R* 11. vocatisq. *B T*, *T M*, *M N*, semper: *i*; & *B C*, ac *T* 12, ut & *M*, 14, perpetim λ; sequentes se pandent proprietates.

I. Recta *E P* æquabitur curvæ *A D E*: cum 1 *K* & *A* 4, *K* 3 & *Z* 4, *S V* & *Z* X &c. continuo ex hypothesi æquentur, & ex partium æqualitate totorum æqualitas legitime inferatur, quare & recta *E P* erit = omnibus *u*, seu curvæ *A D E*.

II. Recta *B M*, hoc est *B T* + *T M* + *M N* &c. æquabitur omnibus *i*.

III. Recta *B* I mensurabitur per omnia λ.

IV. Adeoque integra tangens *B E* æqualis erit omnibus *u* + ω, & quia omnia *u* æquantur curvæ *A D E*, erit recta *B E* æqualis curvæ *A D E* + omnibus λ seu rectæ *B I*.

V. Cum autem lineolæ *A*, 11; 11, 10; 10,

9; 9, 8; 8, I; pariter sint infinitesimæ angulos perpetuo in 8, 9, 10, 11; facientes, notum est eas omnes in lineam curvam *AI* desinere, quæ in eandem partem ac curva *ADE* concava est; cujusque hæc est proprietas; ut quælibet recta *EI*, *D*, 8, *X*, 9, &c. curvam *ADE* contingens huic sit ad angulos rectos; & contra.

Cum enim ex hypothesi *D*, 8, & *D*, 9, sint æquales, & 8, 9, infinitesima, erunt ex lemmate 33. angulo *D*, 8, 9, & *D*, 9, 8, recti, unde consequitur propositum.

VI. Quod etiam *RG*, *NF*, *K*4, *ZS* &c. curvæ sint modo dictam habentes relationem, ad curvam *ADE*, eodem modo demonstratur.

§. 7. Unde hoc tandem oritur theorema si ab eodem principio *A* duæ egrediantur Curvæ *AI* & *AE*, in eandem partem concavæ, ita ad se invicem relatæ, ut, quæ interiorem *AE* tangit recta, verb. *D*, 8, sit exteriori *AI* semper ad angulos rectos, erit *D*, 8, pars tangentis inter duas curvas intercepta perpetuo æqualis curvæ *AXD* inter punctum contingentiæ *D*, & principium commune *A* interjectæ.

Est enim *DX* = *D*1, tum *XZ* = 3, 1, ac *Z*, 4 = 3, 7, &c. ex modo assumtis; unde liquet intentum.

§. 8. Hoc notetur, (quod inter præcedentia jam attigimus) si curva *ADE* sit versus

axem

axem $AQ$ concava, *Fig. LXXVI.* rectas $TD$ & $BE$ curvam in punctis successivè ab axe remotioribus tangentes, utroque sui extremo crescere; altero quidem per infinitesimam $OE$ seu $u$ altero per $BC$ seu $\lambda$; unde facta $TD = s$, erit tangens proxima $BE = s + u + \lambda$; est enim $CO = TD$ per superiora. Si vero fuerit curva $ADE$ (*Fig. LXXIX.*) versus axem convexa, tangentes, altero sui extremo, quo curvam tangunt, crescere, per $u$ seu $OE$; altero vero, quo axem intersecant, decrescere per $TC$ seu $\lambda$. Hoc est, si $TD$ sit $= s$; erit $BE = s + u - \lambda$, est enim $BO = CD$ per anteriora.

Nec opus est addere, si rectæ curvas in punctis ad axem successivè appropinquantibus, tangant, futurum ut, positâ $BE = s$, sit $TD = s - u - \lambda$ in priori, sed $s - u + \lambda$ in posteriori casu.

§. 9. Cum autem omnis curvarum in rectas mutatio in eo sita sit, ut inveniatur summa omnium $u$, seu longitudo rectæ $IE$; hinc sese offerunt methodi, à prioribus, quas §. 1, 2, &c. recensuimus, diversæ: verb. gr. Sit *Fig. LXXVI.* $DQ$ applicata: $y$, ac eadem, quæ in superioribus, symbola; est, uti notum est, $TD : DQ :: DE : EH$, seu $s : y :: u : a$, unde semper $yu = sa$.

Ut jam hinc longitudo curvæ $ADE$ indagetur: describatur, *Fig. LXXVII.* curva secunda $MNI$, cujus applicata $NO$ sit $= DQ = y$,

infinitesima $OE = u$, erit $GI = EH = a$; adeoque $EI = y + a$, & curvilineum $MIE =$ omnia $yu$; cum autem sit ex hypothesi, $a : u :: y : s$. seu $IG : GN :: NO : OC$, erit $OC$ hujus curvæ tangentem determinans æqualis ipsi $OC = DT$ in *LXXVI.* Figurâ, seu $s$, & $BC = \lambda$: adeoque $BE$, *Fig. LXXVI & LXXVII.* quæ tangens est in curvâ *ADE*, erit subtangens in curvâ secundâ *MNI*, ac $ME =$ omnia $u =$ curva *ADE*; & $BM =$ omnia $\lambda$; unde, si posset inveniri relatio curvæ *MNI* ad axem *ME*, ex datâ applicatâ $NO = y$, & subtangenti $CO = s$, quæ lineæ *TD* curvam *ADE* tangenti æqualis est; inventa esset recta *ME* æqualis curvæ *ADE*.

Quare omnis curvarum mensura ad methodum tangentium inversam, seu ad hoc problema reducitur: datâ *Fig. LXXVII.* curvæ applicatâ *NO* & subtangenti *CO*, invenire æquationem, quâ curva *MNI* mediante applicata ad axem suum *MO* refertur.

*Schol.* I. Quomodo autem tangentium inversa methodus cum fructu in geometriâ tractari queat, si *CO* in terminis proximis data sit, cap. de tang. §. 93. & seqq. ostensum est; unde hoc solum ad curvarum rectificationem restat, ut valor lineæ *CO*, datus in terminis applicatam $y$ respicientibus, seu remotis, ad terminos

minos proximos ad interceptam $MQ$ juxta ac applicatam $NO$ relativos reducatur.

*Schol.* II. Datâ vero curvilineorum quadraturâ. quo pacto methodus tangentium inversa inter cognita redigi possit, hic in tyronum gratiam ostendam, licet loco forsan minus opportuno.

Quæritur ergo *Fig.* XXXIX. æquatio curvæ $ADE$, cujus applicata $DQ = IO$ sit $y$, & $TQ$ subtangens seu $t$ sit $= \frac{2y^3}{3rr}$.

Vocatis, $QP$ seu $DH: e$, & $EH: a$, ut semper, fiat. $t:y::e:a::z:r$, ac sit $r$ determinata, erit $za = re$; quare applicata constanter $z$, in $IM$, ad $a$, ut fiat curvilineum $IMO$ æquale omnibus $za$, applicetur $r$ ad $e$ in $QZ$, ut fiat rectangulum $AGZQ$ æquale omnibus $re$. Hinc si $AQ$ vocetur $x$, erunt omnia $re = rx$, ex Cap. II. §. 13. adeoque $rx =$ omnia $za =$ spatium $IMO$, sed $t$ seu $\frac{2y^3}{3rr}$: $y::z:r$, unde $3rz = 2yy$, & $z = \frac{2yy}{3r}$, ad complementum parabolæ $FOK$; quod juxta præcedentia quadrabile est & $= \frac{2}{3}zy$; sed, per modo assumta, omnia $za$ seu $\frac{2}{3}zy$, æquatur omnibus $re$ seu $rx$, quare $z = \frac{3rx}{y} = \frac{2yy}{3r}$,

 unde

unde tandem $9rrx = 2y^3$, quæ curvæ *ADE* æquatio quæsita est.

Quod autem ex hoc æquatione rursum prodeat *TQ* seu $t = \frac{2y^3}{3rr}$ jam abunde notum est. Neque hanc methodum semper obtinere, modo modo omnia $za$ seu spatium *FKO* quadrabile sit, ulteriori demonstrationum apparatu indiget.

§. 10. Alia curvarum longitudines explorandi methodus hoc nititur fundamento; quod scilicet, *Fig. LXXVIII.* integra tangens *BE* sit æqualis omnibus $u$ + omnibus $\lambda$, hoc est curvæ *ADE* + omnibus $\lambda$, uti §. 6. N°. IV. demonstratum fuit. Unde, quia datâ curvâ *ADE* datur tangens *BE*, si darentur omnia $\lambda$, darentur omnia $u$ seu longitudo curvæ.

Ut ergo indagentur omnia $\lambda$ (vocatis, $TD:s$, $TQ:t$, $DQ:y$, infinitesimis $QP:e$, $EO = ED:u$, $BT:i$, $BC:\lambda$,) quia *TC* est normalis ipsi *BE*, est $BE : BP :: BT : BC$; hoc est $s+u+\lambda : t+e+i :: i : \lambda$; quare, rejectis rejiciendis, fiet $s\lambda = ti$; unde $s : t :: i : \lambda$, sit hoc ut determinata $r$ ad $z$, erit $r\lambda = zi$.

Unde posita $z$ in *TG*, donec formetur curvilineum *AFB*; erit hoc æquale omnibus $zi$, quod æquale est omnibus $r\lambda$, unde $\frac{Omn.\ zi}{r} = Spat.$

$= \frac{Spat.\ AFB}{r} =$ omnia $\lambda$.

Quæ si subtrahantur ex tangenti B*E* reliquentur juxta modo tradita omnia *u*, seu longitudo curvæ A*DE*.

*Coroll. I.* Unde, si omnia *zi* seu spatium *AF*B sit quadrabile, erit curva *ADE* in rectam mutabilis. Quare denuo ex curvilineorum omnium quadratura curvarum omnium longitudo data erit: exempla quilibet indagâre potest.

*Coroll. II.* Hoc addo, modum hinc non ita vulgarem derivari, quo ex dato quolibet curvilineo mensurabili *AF*B inveniri potest curva *ADE*, quæ longitudinis suæ mensuram patitur. Sit *AT*: *x*, *GT*: *z*, ac *AGF* quælibet curva, cujus spatium *AF*B mensurabile est, verb. gr. parabola, unde erit $rx = zz$, & juxta præcedentia spatium $AFB = \sqrt{\frac{4}{9}rx^3} =$ omnia *zi*; quocirca omnia $\lambda = \frac{Spat.\ AFB}{r} = \sqrt{\frac{4x^3}{9r}}$ = omnia $r\lambda$.

Jam vero, ut curvæ *ADE* æquatio ex hisce datis investigetur, & longitudo tangentis *DT*, cum sit $s:t::r:z$, hoc est $DT : TQ :: r : GT$, eò deductum est hoc problema, ut invenienda restet curva *ADE*, cujus tan-

gens $DT$ ad subtangentem T$Q$ eam semper habeat rationem, quam $r$ ad $z$.

Hoc autem, juxta tradita §. 101. Cap. de tang: effici posse sequentia palam facient.

Sit igitur, uti loco mox allegato, $AQ: n$. atque, ductâ $AK$ ipsi $A$B normali, ad eundem axem $A$T describatur curva $AIN$, cujus applicata T$I = AL: f$, T$L: g$, hanc autem tangat recta $NIS$, ac sit subtangens T$S: b$; erunt, (veluti §. 101. Cap. de tang.) ductis diagonalibus B$K$ & T$L$, donec sibi mutuo occurrant in E, puncta $D$ & $E$ in curvâ quæsitâ $ADE$; adeoque $g : x :: s : t$; propter triangulorum B$C$T, T$AL$, & T$QD$ similitudinem: sed ex hypothesi fuit $s : t :: r : z$, quare & $g : x :: r : z$, ergo $rx = gz$; jam vero ex supposito $AYG$ est parabola, ideoque $rx = zz$, quocirca $g = z$, & $rx = gg$.

Sed, ob triangulum T$AL$ in $A$ rectangulum, est $gg = ff + xx$, unde prodit $rx - xx = ff$ æquatio curvæ $NIA$, quæ circulus igitur est; cujus subtangens T$S$ est $b = \frac{2rx - 2xx}{r - 2x}$, unde $AS$ seu $b + x = \frac{[illegible]}{r - 2x}$.

Jam autem, ex §. 101. Cap. I. de tang. & subsequenti Scholio, est $b - x : b :: g : s :: x : r :: f : f$; quare, in locum $b$ & $b - x$ substitutis valoribus, erit

erit $\frac{rrxx}{rr-2rx}$ : $\frac{2rrx-2rxx}{r-2x}$ :: $g : f :: x : t :: f - y$; unde, emerget $t = \frac{2rx-2xx}{r}$, & $\frac{2rf-2xf}{r} = y$, aut, loco $f$ surrogato ipsius modo invento valore, cub. $r - x$ in $4x = rryy$.

Tandem, cum sit T$A$ + $AQ$ = $Q$T, seu $x + n = t$, erit, valore ipsius $t$ reposito, $rx - 2xx = rn$, quare per inventas duas hasce æquationes $rx - 2xx = rn$ & cub. $r - x$ in $4x = rryy$ ejecto $x$, emerget (salvo calculo) æquatio sequens $n^4 + 2rn^3 - 8rrnn + 2yynn - 6ryyn + y^4 = 0$. Quæ curvæ $ADE$ relationem ad axem $AQ$ seu $n$, mediante applicata $QD$ seu $y$, exprimit.

Hinc jam quomodo tangens B$E$ inveniatur plus quam cognitum est: ut & hanc curvam $ADE$ æquari tangenti B$E = \sqrt{\frac{4x^3}{9r}}$, seu tangenti B$E$ — omnia λ.

Quo pacto vero in aliis curvarum $ADE$ & $AIN$ positionibus res hæc tractanda sit, hoc percepto quilibet intelliget.

*Coroll. I.* quâ ergo ratione ex quovis curvilineo quadrabili curva inveniri queat, cui recta æqualis exhiberi potest, ex corollario prægresso patet, sed ex §. 18. Cap. II. aliisque, ex quâvis curvâ geometricâ innumera curvilinea quadraturam

ram admittentia deducuntur, quamobrem ex quâvis curvâ geometricâ infinitas curvas in rectas mutabiles derivari posse hinc inferri potest.

*Scholium*. Cap. I. §. 101. methodum tradidimus, ex dato curvilineo *ABN* curvam (*Fig. LXXVIII.*) *ADE* describendi, quæ eam inter se habent relationem, ut sit perpetuo $AT : AL :: TQ : QD$, tum $AT : TL :: QT : TD$. Quod, cum illic loci multarum satis infinitesimarum ope præstitum sit, quomodo expeditius paullo effici queat, hic ostendisse forsan tyronibus non inutile fuerit, retentis ergo §. superioris symbolis, sint infinitesimæ $NM = KL = o$, $RL = \varphi$; est $b : f :: i : o$, unde $fi = bo$; tum $BA : AK :: RL : KL$, seu $x + i : f + o :: \varphi : o$, unde $xo = f\varphi$; tandem $ET : BT :: EL : RL$. Hoc est $s + u : i :: s - g + u : \varphi$; unde $s\varphi = si - gi$; ex quibus tribus æquationibus elisis infinitesimis orietur $s = \frac{bg}{b - x}$, quod, licet lemmatis in modum §. 10. præmitti potuisset, ne propositionum tamen se mutuo insequentium filum abrumperetur, hoc potius insequenti scholio comprehendere volui, insimulque monere, me præcedenti propositione methodi magis universalitatem spectasse, quam positionis rectarum, flexuræque curvarum rationem habuisse; cum in singulis fere hujus problematis casibus, ac juxta variam curvilinei dati *ABF* naturam, variæ sint.

§. 11. Sit porro *Fig. LXXIX.* Curva *ADE* convexa versus axem *AQ*, quam rectæ *TD* & *BE* tangant in *D* & *E*; vocenturque $TD : s$, $DQ : y$, $TQ : t$, $AQ : x$, ductâque $BC$, ut $CE$ sit æqualis $BE$, hoc est normali in $C$ juxta lemma 33. dicantur infinitesimæ $TB : i$, $TC : \lambda$, $DE = OE : u$; $DH = QP : e$, $EH : a$, $CB : \kappa$, erit

erit $BE = s + u - \lambda$, unde tangentium $TD$ & $BE$ differentia continua est $u - \lambda$; si vero eædem tangentes $TD$, & $BE$ constanter producantur in $F$ & $I$, ita ut $TF$ appellatâ $h$, linea $BI$ sit perpetuo $h + \lambda$; erit $DF = s + h$ & $EI = BE + BI = s + u - \lambda + h + \lambda = s + h + u$; quare linearum $DF$ & $IE$ differentia erit $= OE = u$, lineæque $EF$ & $EI$ æquales; unde clauso per $FI$ triangulo $EFI$, erit $FI$ utrique perpendicularis, ex lemmati 33; & parallela infinitesimæ $CB$, ac ex $T$ ducta $TS$ itidem & ipsi $CB$ æquidistans faciet $BS = CT = \lambda$; remanebitq. $SI = TF = h$; cum autem $FI$ sit quoque infinitesima, quoniam $CB$ talis est, continuatâ, ut in §. 6. tangentium serie, rursus omnia $FI$ abibunt in curvam $AFI$, cui omnes rectæ curvam $ADE$ tangentes normales erunt; unde, si ambæ hæ curvæ in eodem puncto $A$ desinant, semper recta $DF$ æquabitur curvæ $AD$, tum juxta §. 7. tum etiam, quia $EF$ æquatur omnibus $u$, quoniam $BE$ æquatur omnibus, $u - \lambda$, & $BI$ omnibus $\lambda$, uti tangentes continuando apparebit.

Quare, si datâ curvæ $ADE$ relatione, adeoque omnibus eam tangentibus, inveniri posset curvæ $AFI$ natura, seu respectus ad axem $AQ$, inventa foret hac unica operâ omnium geometricarum curvarum longitudo.

*Coroll.*

*Coroll.* I. Hoc saltem hinc notum est; datâ quâvis curvâ *A* F I aliam *A D E* inveniri posse, cui recta æqualis dari potest.

Sit enim in curvâ *A* F I applicata F *G*: $z$, & subtangens *N G*: $k$, ipsa *G* T normalem curvæ *F* T definiens: $l$, intercepta *A G*: $f$, infinitesima F *K* = *G V*: $o$; *K* I: $i$, F I: $\mu$; erit ob triangulorum *E C* B & *E* F I similitudinem, *F* I: *F E*:: *C* B: *G E*, seu $\mu : b + s + u :: x : s - \lambda + u$, unde, rejectis rejiciendis per lemm. 10. erit $\frac{s\mu}{b+s} = x$. Sed & T *G*: *G* F:: T *C*: *C* B, hoc est $l : z :: \lambda : x$; unde $\frac{z\lambda}{l} = x$, ideoque $\lambda = \frac{ls\mu}{bz + sz} = \frac{li}{b}$, (nam T F, $h$: T *G*, $l$:: T B, $i$: *C* T: $\lambda$,) unde denuo $\mu = \frac{bzi + szi}{bs} = \frac{ho}{z}$ (nam T F: F *G*:: F I: F *K*,) quare, si jam alia possit inveniri æquatio infinitesimas, $i$ & $o$ involvens, utraque earum elideretur, hunc in finem, applicatâ *GT* in *G L*, & *V* B in *V M*; donec per puncta *L* & *M* describi possit nova curva *L M*, cujus subtangens *G X* vocetur $g$, erit rursùm $LR = GV = o$, & $MR = i - o$; jam ex passim notis est $XG : GL :: LR : RM$; seu $g : l :: o : i - o$, unde $lo = gi - go$; quæ æquatio easdem cum superiori infinitesimas continet,

quare

quare ex utrâque emergit tandem $o = l + g = \frac{hzzi + szzl}{hhs}$, & elisa $i$ tandem $s = \frac{hlzz + hgzz}{ghh - lzz - gzz}$, quia autem $hh - zz = ll$ fiet $s = \frac{hlzz + hgzz}{gll - lzz} = TD$.

Hâc autem inventâ notum erit punctum $D$ in curvâ $ADE$, unde cæteræ ejus proprietates, & relatio ad axem $AQ$ deduci possunt.

Hoc addo, cum rectam $DF$ curvæ $AD$ æquari jam sæpe ostensum sit, erit curva $AD = s + h = \frac{h^3 g}{gll - lzz}$: ut vero valor ipsius $s$ in aliis terminis reperiatur, quia $NG : GF :: GF : GT$ seu $k : z :: z : l$, erit $kl = zz$, quo valore in locum ipsius $zz$ surrogato prodibit $s = \frac{hgk + hlk}{gl - kl}$.

*Schol.* I. Atque hinc ad ingeniosissimam *Nob. Hugenii* curvarum evolutionem manu quasi ducimur; si enim recta $FE$ instar fili flexilis esse concipiatur, ac curvæ $EDA$ circum posita, deinde extremitate sua $F$ à puncto $A$ exire, erit linea $ADE$ evoluta, ac $AFI$ ex evolutione descripta; qua data, retentisque symbolis modo assumtis, invenietur $s$ seu $TD$ eadem cum eâ, quam statim exhibuimus.

§. 12. Ut vero pateat tyronibus modus, quo curvæ $ADE$ relatio ad axem $AQ$ inveniri potest;

test; hoc est inter $DQ:y$, & $AQ:x$; erit primo $TF:FG::TD:DQ$, seu $h:z::s:y$, unde $zs=hy$, deinde $FT:TG::TD:TQ$ seu $h:l::s:\frac{ls}{h}=TQ$, cui si addas $TG+GA=l+f$, erit igitur $QT+TG+GA=\frac{ls}{h}+l+f=x=AQ$, unde reposito in utraque æquatione $s=\frac{hgk+hlk}{gl-kl}$ emergent pro priori æquatione $gly-kly=gkz+klz$; & pro secundâ $gx+fk=gk+fg+gl+kx$.

Cum autem, datâ relatione curvæ $AFI$, omnes litteræ exceptis, $x$ & $y$ possint ad $AG$ seu $f$ reduci, hâc elisâ remanebit æquatio inter $x$ & $y$, seu curvæ $ADE$, quæ quærebatur.

Possent circa methodum evolutionum inversam, seu ex evolutâ descriptam inveniendi, hoc loco quædam adjungi: cum autem (*Fig. LXXVI*) datâ evolutâ $ADE$, ejus descriptæ $AI$ proprietates non nisi rectis $IE$, $8D$, &c. determinari queant, neque hæ, nisi cognitâ curvæ $ADE$ longitudine, cognoscantur; solutionem hujus problematis curvarum rectificationem, methodum saltem tangentium inversam, involvere, eo ipso manifestum est; quæ, cum non exiguis adhuc difficultatibus premantur, pluribus hisce addendis supersedeo.

CA-

# CAPUT. VI.

## *De Mensura Curvilineorum ex Centris Gravitatum.*

§. I. CElebre, tum hoc, tum antiquis temporibus, mensurationis fundamentum fuit, *Centri gravitatis consideratio*; quæ eodem cum superioribus fonte manans, nisi materiæ dignitas particularem sibi discussionem deposcere videretur, jam inter tertii capitis corollaria locum invenire potuisset.

Resumtis enim Cap. III. §. 4. &c. tum figurâ *LV*. *N*°. I. tum symbolis, erat cylindrici plano A O F insistentis truncus inferior, posito angulo *R* B *V* semirecto, æqualis $d+\frac{1}{2}y$ in $ye$; cum autem $ye$ sit rectangulum Q*DHP*, erit (factâ $\zeta\theta = \frac{1}{2}y$ & $\beta\zeta = d$.) juxta mechanicæ regulas $d+\frac{1}{2}y$ in $ye$ momentum rectanguli Q*DPH* ad axem motus *C* B. appensi; siquidem momenta gravium exprimuntur per rectangula ex mole corporum in respectivam ab axe distantiam ductâ. Jam autem omnia $ye$ constituunt figuram A O F, unde momentum omnium $ye$ in suis respectivè distantiis ad axem *C*B appensorum, æquatur momento totius figuræ

A O F

*AO*F in distantia ξω ad eundem axem *CB* appensæ, si punctum ω pro centro gravitatis totius figuræ *AO*F assumatur. Quod mechanicæ principia non ignorantibus satis notum est.

Unde si figura *AO*F vocetur $f$, & ξω distantia centri gravitatis ω ab axe motûs dicatur: $k$, erit $kf =$ omnia $d + \frac{1}{2}y$ in $ye$.

Quare expositis trunco resecto, seu omnib. $dye + \frac{1}{2}yye$, figura A*O*F seu $f$, & distantia centri gravitatis ejusdem $k$, ex datis duobus datur tertium.

§. 2. Quomodo autem hæc ungulis vel seminormaliter, vel alio quovis angulo per AO resectis applicari queant, quilibet suo marte indagabit: cum nihil hic diversum occurrat.

§. 3. Hoc addo, cum sit $fk =$ omnia $dye + \frac{1}{2}yye$, truncum inferiorem æquari cylindrico, cujus basis figura AO*F* seu $f$, & altitudo æqualis lineæ ξω, quâ ω centrum gravitatis figuræ ab axe motus *CB* distat.

§. 4. Si vero angulus *R*B*V* non semirectus, sed alius quivis supponatur, ac cylindricus basi AOF insistens habeat altitudinem *S*T seu *D*δ seu $h$, ac βμ sit $b$, erit totus cylindricus æqualis omnibus $hye$, ac truncus inferior = omnib. $\frac{h}{b}$ $dye + \frac{1}{2}yye$, quare truncus superior

æqua-

æquabitur omnibus, $hye - \frac{h}{b}dye - \frac{h}{2b}yye$ seu $\frac{h}{b}$ in $b - d - \frac{1}{2}y$ in $ye$;

Cum autem $b - d - \frac{1}{2}y$ sit æqualis lineæ $\theta\mu$, quâ centrum gravitatis rectanguli *QPDH* distat à lineâ *TV*, erit linea $\psi\omega$, seu distantia centri gravitatis totius figuræ *AOF* ab axe $TV = b - k$, unde juxta §. I. erunt omnia $b - d - \frac{1}{2}y$ in $ye = bf - kf$; adeoque truncus superior $\frac{h}{b}$ in $bf - kf$ ad truncum inferiorem $\frac{h}{b}$ $kf$ ut $b - k$ ad $k$, seu ut $\psi\omega$ ad $\omega\xi$, hoc est ut partes lineæ $\xi\psi$ resectæ a centro gravitatis figuræ.

§. 5. Quod si hæc ad solida, tum conöidica, tum annularia transferre placet, patet ex §. 20. &c. Cap. III. solidum tubulatum ex figura *AOF* circa axem *CB* rotatum, æquari omnibus, $\frac{2dyec + yyec}{2r}$; quod solidum si vocetur: $s$, quia omnia $dye + \frac{1}{2}yye$ ex §. 3. sunt æqualia $kf$; erunt omnia $\frac{dyec + \frac{1}{2}yyec}{r}$ seu corpus hac ratione genitum $= \frac{kfc}{r} = s$.

§. 6. Unde, ad similitudinem §. 3. solidum omne annulare seu $s$ æquale est cylindrico, cujus basis est $f$ seu figura *AOF*, & altitudo

$\frac{kc}{r}$ seu circumferentia circuli, cujus radius est $z u$ seu $k$, aut distantia centri gravitatis figuræ ab axe motus.

§. 7. Assumatur jam secundum solidum annulare $= p$; & figura, cujus circumvolutione genitum est, sit $= g$; distantia centri gravitatis figuræ ab axe rotationis $= h$; erit solidum hoc secundum ad solidum primum, hoc est, $p$ ad $s$ uti $\frac{hgc}{r}$ ad $\frac{fkc}{r}$, quare $shg = pfk$; unde si tres exponantur rationes solidi ad solidum seu, $s$ ad $p$, figuræ ad figuram seu $f$ ad $g$, & distantiæ centri gravitatis in primâ figurâ ab axe motus, ad similem distantiam in secundâ seu $k$ ad $h$, ex cognitis duabus cognoscitur tertia.

§. 8. Hinc si truncus quilibet aut ungulæ aut alteri trunco æqualis supponatur, multum operæ in quibusdam curvilineis quadrandis conferret, si centrum gravitatis cognitum sit. Applicatis enim (*Fig. LX.*) ad eundem axem $AO$ figuris $AFO$, $AGO$; vocatisq. $DQ:h$, & $RD:f$, $QP:e$, erit truncus inferior cylindrici basi $AFG$ insistentis, ac per $AO$ semi-normaliter resecti, æqualis omnibus $\frac{2hfe + ffe}{2}$ qui supponatur æqualis omnibus $\frac{yye}{2}$, seu ungulæ seminormaliter per $AO$ resecti cylindrici in

in basi *AIO*, si nimirum *QI* sit continuo $= y$, erit perpetuo $h + \frac{1}{2}f$ in $fe = \frac{1}{2}y$ in $ye$; hoc est juxta mechanicæ theoremata.

Omnium $fe$ seu trapeziorum *SRED* momenta ad axem *AO* æqualia momentis omnium $ye$ seu trapeziorum *PHIQ* ad eundem axem.

Sit autem planum curvilineum $AFG = k =$ omnia $fe$, ejusq. centri gravitatis *Y* distantia *ZY* ab axe $= l$; nec non planum curvilineum $AIQ = g =$ omnia $ye$, ejusq. centri gravitatis *V* ab axe *AO* distantia $NV = n$; erunt, juxta 1 hujus, omnia $\frac{2bfe + ffe}{2} = kl$, & omnia $\frac{yye}{2} = gn$, adeoq. $gn = kl$.

Unde cognita figuræ *AGF* mensura, ejusque centro gravitatis; & centro gravitatis plani *AIO* cognoscitur plani *AIO* magnitudo.

Quod si præterea ad eundem axem applicetur figura *AMO*, sitque $IK = q$, & truncus in plano *AFG* jam æqualis statuatur non ungulæ in *AIO*, uti mox factum fuit, sed trunco in basi *AHOM* per *AO* resecto seminormaliter, hoc est, si fiat semper $\frac{2bfe + ffe}{2} = \frac{2qye + qqe}{2}$, erit ergo $h + \frac{1}{2}f$ in $fe = y + \frac{1}{2}q$ in $qe$; & *TX* distantiâ centri gravitatis *X* figuræ *AHOM* vocatâ *n*, ac ipsâ figurâ *AHOM*

seu omnia $qe = g$; erit denuo $gn = kl$, ut supra.

Ac si $QR$ seu $h+f$ vocetur: $z$; nec non $QK$ seu $q+y$ dicatur: $s$; erit in primo casu $rr - hh = yy$ & in secundo $rr - hh = ss - yy$.

Unde primum & secundum *Cl. Slusii* lemma ortum vel duxisse, vel ducere saltem posse videntur. Particularia satis egregia & multa hinc in appendice *Mesolabi* derivavit Eruditus Author.

§. 9. Cum autem ex §. 9. & 24. Cap. III. generis alîus tum truncorum, tum solidorum infinitesimæ deducantur, eadem patet ad investigandam curvilineorum quadraturam semita, positâ enim (*Fig. LXII.*) infinitesimâ $QN: e$, applicata $AN: y$, intercepta $RN: x$, ac determinata $BR: b$, erit truncus cylindrici basi $RAF$ insistentis ac per $HB$ seminormaliter resecti æqualis omnibus $bye + xye$, juxta Cap. III. §. 10. hoc est omnibus, $b+x$ in $ye$, seu omnibus, $b+x+\frac{1}{2}e$ in $ye$, per lemm. 10. cum autem $ye$ sit rectangulum $PQNA$, ac $KC$ ab ipsius centro gravitatis $C$ ad axem $HB$ ducta sit $= b+x+\frac{1}{2}e$, erit $b+x+\frac{1}{2}e$ in $ye$ seu $bye+xye$ momentum parallogrammi $PQNA$ ad axem motus $BH$.

Jam autem rursum ex Mechanicâ momentum omnium $ye$ in respectivis suis distantiis $KC$ æquantur momento totius figuræ $RAF$ in distantia $FL$ ad axem motus appensæ, si $L$ totius

tius figuræ centrum gravitatis supponatur. Fiat ergo figura $RAF = f$, & $FL = d$, erunt omnia, $bye + xye = fd$, hoc est truncus modo dictus æqualis cylindrico in Basi $RAF$ & altitudine $KC$; unde rursum eadem ac modo recensita deduci possunt ac hisce ad figuras §. 33. & 34. Cap. III. applicatis, lemmata *Cl. Slusii*, tertium & quartum, in curvilneorum mensurâ satis magni momenti ortum suum debere videntur, sed nequid nimis.

§. 10. Notetur hinc demonstrari, (resumta *Fig. LX.*) momenta figurarum ad axem $AO$ inter se esse (retentis §. 8. symbolis) uti omnia $\frac{2bfe + ffe}{2}$ ad omnia $\frac{2qye + qqe}{2}$, seu divisione factâ per $e$ constantem, ut omnia $b + \frac{1}{2}f$ in $f$ ad omnia $y + \frac{1}{2}q$ in $q$, hoc est ut momenta omnium linearum $RD$ in una figura $AFG$, ad momenta omnium linearum $KI$ in alia figura $AHOM$; quod a plurimis assumitur.

§. 11. Similia hisce circa superficies curvas demoustrari possent, quæ cum ex modo traditis levi operâ colligantur, breviter perstringam, resumtis igitur Cap. III. §. 2. & 3, 4. symbolis ac *Fig. LXIX.* erit $du + yu$ trunci inferioris superficies curvæ $AEO$ insistentis, juxta ibidem tradita. Hæc autem æquatur momentis omnium rectularum $DE$, curvam $ADEO$ compo-

 nen-

nentium, ac ad axem $BC$ appensarum; si enim $DE$ seu $u$ medio sui puncto $F$ seu centro gravitatis appendatur ad axem $BC$ in distantia $FL$, quæ æqualis est $CQ + QD + YF$ seu $d + y + \frac{1}{2}a$, erit ipsius $DE$ momentum ex mechanicis semper $dy + uy + \frac{1}{2}au$, hoc est, per lemm. 10, $= dy + uy$; cum autem momenta omnium $DE$ curvam $ADEO$ constituentium æquentur momento totius curvæ in distantia $XZ$ ad eundem axem appensæ, si quidem $X$ pro gravitatis centro totius curvæ supponatur, erunt vocatis, curva $ADEO:k$, & $XZ:l$, omnia $du + yu = kl$.

Adeoque trunci superficies curvæ insistens æqualis superficiei cylindricæ, seu rectangulo $kl$ ex curva $k$ & distantia centri gravitatis curvæ ab axe seu $l$, & positâ $d = 0$, erit ungulæ quadrantalis basi $AEO$ insistentis superficies = omnia $yu$ æqualis momentis omnium $DE$ ad axem $AO$, seu omnium $y + \frac{1}{2}a$ in $u$, seu $QD + FY$ in $DE$; unde posita curvæ integræ longitudine, $k$, & ejus centri gravitatis ab axe $AO$ distantiâ $l$, sequitur rursum omnia $yu$ esse $= kl$.

§. 12. Quod si hæc ad superficies rotatione genitas extendere placeat; erunt omn. $\frac{dyc + yuc}{r}$ æqualia superficiei ex curvæ $ADEO$ rotatione circa axem $BC$ genitæ, ex Cap. IV.

§. 14.

§. 13. Hæc, juxta præcedentem, æquatur $\frac{klc}{r}$; hoc est superficiei cylindricæ, cujus basis est curva $k$, & altitudo est circumferentia circuli radio $ZX$ seu $l$ descripta.

§. 14. Quod si secunda curva exponatur, cujus longitudo $= g$, distantia centri gravitatis ab axe motus $= n$; erit superficies ex hujus curvæ circa hunc axem rotatione genita per præcedentem $= \frac{gnc}{r}$; & hæc ad superficiem primam seu $\frac{klc}{r}$ ut $gn$ ad $kl$; unde ex tribus rationibus, superficiei ad superficiem, curvæ ad curvam, & distantiæ centri gravitatis in prima curva ad eandem distantiam in secunda, datis duabus dabitur tertia.

Plura hinc nec exiguæ notæ particularia subsequentur, centriq. gravitatis inveniendi multifaria methodus, si quis hæc penitius prosecutus fuerit, hæc autem apud eruditissimos authores *Wallisium*, *Steph. de Angelis*, aliosque in copiâ reperient, quibus doctissima eorum monumenta evolvere volupe fuerit.

## *Appendicula.*

QUo vero hæc faciliusin usum deducantur, non inutile forsan fuerit planorum, solidorumq., nec non superficierum, ac linearum curvarum exponentia algebraica in unam quasi tabellam, contraxisse.

Sit ergo, Figurâ LXXX. curvilineum $AOF$, eique circum

circumscriptum rectangulum $AOFM$, fiatque $BC$ ipsi $AO$ ac $NI$ ipsi $AM$ parallela, vocatisq. ut semper, $QD:y$, $QA:x$, $CQ:d$, $NA:b$, $OF:p$; infinitesimisque $DH:e$, $HE:a$, $ED:u$, sit $CD$ seu $d+y=z$; $r$ sit radius circuli, cujus circumferentia: $c$.

Exprimentur:

*Rectangulum* $AFOM$ per omnia $pe$.

*Spatium Curvilineum* $AFO$ per omnia $ye$, §. 4. Cap. II.

*Columna aut prisma* in basi $AOF$, cujus altitudo $CQ$, per omnia $dye$ §. 2. Cap. III.

*Truncus inferior* hujus columnæ, si per $BC$ seminormaliter secetur per omnia $\frac{2dye+yye}{2}$, §. 4. Cap. III. aut per omnia $\frac{zz-dd \text{ in } e}{2}$, § 4. Cap. III.

*Momentum Figuræ* $AOF$ ex centro suæ gravitatis ad axem $BC$ appensæ per eadem, §. 1. Cap. VI.

*Truncus inferior ejusdem columnæ* per $NI$ seminormaliter resectæ per omnia $by+xy$ in $e$ §. 10. Cap. III.

*Momentumq. Figuræ* $AOF$ ex centro suæ gravitatis ad axem $NI$ appensæ per eadem, §. 9. Cap. VI.

*Trunci inferiores dictæ columnæ alio quolibet angulo* per $BC$ aut $NI$ resectæ, in primo casu per omnia $\frac{2dy+yy}{2}$ in $\frac{eb}{b}$ §. 4. Cap. III. aut per omnia $\frac{zz-dd}{2}$ in $\frac{eb}{b}$ §. 4. Cap. III. in secundo casu per omnia $by+xy$ in $\frac{eb}{b}$ §. 11. Cap. III. pro variâ ratione ipsius $b$ ad $b$.

*Ungula semiquadrantalis* ejusdem columnæ per $AO$ seminormaliter resectæ per omnia $\frac{yye}{2}$, §. 7. Cap. III.

*Momentumq. figuræ* $AOF$ ad axem $AO$ ex centro gravitatis suæ appensæ per eadem, §. 2. Cap. VI.

*Truncus seu ungula semiquadrantalis* ejusdem columnæ per $AM$ resectæ per omnia $yxe$, §. 9. Cap. III.

Mo-

*Momentumq. figuræ* AOF ad axem AM ex centro gravitatis suæ appensæ per eadem, juxta §. 9. Cap. VI.

*Ungulæ truncique semiquadrantales* ad alium angulnm resectæ per omnia $\frac{byye}{2b}$, §. 6. Cap. III. aut per omnia $\frac{byxe}{b}$ §. 11. Cap. III.

*Solidum rotatione genitum* ex rectangulo AFOM circa AO seu cylindrus per omnia $\frac{ppee}{2r}$, §. 14. Cap. III. & circa AM per omnia $\frac{pxee}{r}$ §. 24. Cap. III.

Ex curvilineo AOF circa AO seu conoides, per omnia $\frac{yyae}{2r}$ §. 17. Cap. III.

Ex eodem curvilineo circa AM per omnia $\frac{yxee}{r}$ §. 24. Cap. III.

Ex AOF circa BC seu annulare per omnia $\frac{2dy+yy}{z}$ in $\frac{ee}{r}$ §. 20. Cap. III. seu omnia $\frac{zz-dd}{2}$ in $\frac{ee}{r}$ §. 20. Cap. III.

Ex AOF circa NL seu tubulatum per omnia $by+xy$ in $\frac{ee}{r}$ §. 27. Cap. III.

*Superficies Columnæ* in altitudine CQ curvilineo AOF insistentis, qua parte curvæ AF superstat per omnia $du$ §. 1. Cap. IV. qua parte rectæ AO per omnia $de$ §. 1. Cap. IV. qua parte rectæ OF omnia $da$ §. 1. Cap. IV. hinc *integra columnæ* superficies per omnia $du+de+da$ §. 1. Cap. IV.

*Superficies Ungulæ semiquadrantalis* per AO resectæ per omnia $yu$ §. 4. Cap. IV.

*Momentum curvæ* AEF ex centro suæ gravitatis ad axem AO appensæ per eadem §. 11. Cap. IV.

*Superficies trunci inferioris curvæ insistens* per BC seminormaliter resecti, quâ parte curvæ AEF insistit per omnia $du + yu$, seu $zu$ §. 3. Cap. IV.

Ac *momentum Curvæ* AEF ex centro gravitatis suæ ad axem BC appensæ per eadem §. 11. Cap. VI.

*Superficies rotatione genita exceptis basibus*, ex rectangulo AMFO circa AO seu cylindri per omnia $\frac{pee}{r}$ §. 9. Cap. IV.

Ex curva AEF circa AO seu conoidis per omnia $\frac{yuc}{r}$ §. 11. Cap. IV.

Ex Curva AEF circa BC seu pars superficiei solidi annularis per omnia $du + yu$ in $\frac{c}{r}$ seu $\frac{zuc}{r}$ §. 12. Cap. IV.

Ex totâ figurâ AOF seu integra superficies solidi annularis, exceptâ basi, per omnia, $\frac{zuc}{r} + \frac{dec}{r}$ §. 13. Cap. IV.

*Ipsa Curva* ADEF per omnia $u$ §. 1. Cap. V.



CA.

# CAPUT. VII.

## *De Maximis & Minimis.*

CUm omnis æquatio unam pluresve indeterminatas continens per curvæ unius pluriumve locum geometricè designari possit, ita ut singulæ occurrentes indeterminatæ vel tanquam applicatæ diversarum linearum ad eundem axem positæ considerari possint, vel etiam una ex illis interceptam quandoque repræsentare; plurimæque reperiantur curvæ (*Fig. LXXXII.*) ADEZ, quarum, si ad rectam AZ referantur, applicatæ ex A in *I* perpetuo crescunt, ex *I* in K per infinitesimum spatium distantes subsistunt, & æquales sunt, ac ex K in Z denuo, manente eâdem curvæ æquatione, decrescunt; patet inter varios applicatarum hisce in curvis valores *extremum* unum dari, cum nimirum nec crescunt nec decrescunt; & hoc quidem in casu *maximum*, cæteris omnibus hinc inde ab hoc *extremo* seu maximo deficientibus.

Simile quid observatur in aliis curvis, aut etiam in hac eâdem, si non ad axem AZ. verum ad rectam YX applicetur, quo quidem casu applicatæ ex Y in *V* decrescunt, in *V* & *S* per infinitesimam distantiam disjunctæ sibi mutuo æquantur & subsistunt, ac ex *S* in X rursum augentur; unde applicatarum punctis *V* & *S* insistentium valores omnium ad hanc curvam pertinentium *minimi* sunt.

Ex quibus consequitur, omnem æquationem indeterminatas quotcunque continentem, si unica ex illis ad valorem *extremum* determinari debeat, ad quendam ex modo dictis curvarum locis, & casum quo nec crescunt nec decrescunt, adeoque sibi invicem æquales sunt duæ sese proxime excipientes applicatæ, referri posse. Ad curvam scilicet versus axem suum concavam si *maximum*, convexam vero si *minimum* expetatur.

Ex

Ex qua *extremi* & linearum, quæ curvas in respectivis punctis tangunt, proprietate sequens in *maximi* & *minimi* determinatione emergit fundamentalis canon.

§. 1. Si curvæ cujusdam *ACDEHZ* subtangens *BT* sit omni assignabili major aut infinita; erunt applicatæ B*C* & *ID* (quæ mediante tangenti *TC* ad subtangentem expositam *TB* relativâ, seu per ipsi coincidentem curvæ infinitesimam *DC*, conjunguntur) sibi mutuo æquales, adeoque inter reliquas curvæ applicatas *maximæ* aut *minimæ*.

*Demonstratio* sit *BT*: $t$, *BC*: $y$ applicata, *CR*: $e$ infinitesima, *DR*: $a$ applicatarum incrementum aut decrementum; erit, juxta proprietatem omnibus curvis communem, $a = \frac{ye}{t}$; positâ vero $t$ infinitâ $= km$ & $e$ infinitesimâ explicatâ per $\frac{r}{m}$ erit $a = \frac{ry}{kmm}$, quod per lemm. 10. nihilo æquivalet.

Quare, cum hoc in casu differentia applicatarum nulla sit, eo ipso nec crescunt nec decrescunt, sed sibi mutuo æquantur, adeoque juxta modo præmissa *maxima* sunt, aut *minima*. *q. e. d.*

§. 2. Unde tandem manifestum est; si expositæ æquationis indeterminata quælibet ad *maximum* aut *minimum* determinanda veniat, æquationem hanc, tanquam ex curvæ convenientis

rientis (in qua nimirum determinanda ad extremum quantitas applicatæ vicem sustinet) naturâ profluentem considerandam esse; cujus curvæ subtangentialis æquatio ex supra traditis regulis est inquirenda, ac ipsa subtangens supponenda æqualis cuidam infinito: unde juxta Schol. General. N°. *XII. extremi* quæsiti seu *maximi* aut *minimi* determinatio sequetur.

§. 3. Sint, ut exemplis hoc illustremus, $x$ intercepta, tum $z, y, f$, ad eandem applicatæ; curvarumque hinc genitarum subtangentes respectivæ, $l, t, n$. ita ut $l$ ad $z$, $t$ ad $y$, $n$ ad $f$ referatur; $d, b, c, r, s$, sint quantitates determinatæ; *extremum* per applicatam $y$ perpetuo denotetur.

I. Casus, *cum termini algebraici extremum aliquod designantes non nisi unam incognitam quantitatem continent.*

Sit $rrx^3 - x^5 + bbccx =$ *alicui extremo*, vocetur hoc $y^5$ vel $rry^3$ aut $bbccy$ similive modo, quo possit æquationem curvæ repræsentare, habebitur curvam hanc exprimens æquatio, $rrx^3 - x^5 + bbccx = y^5$, cujus æquatio subtangentialis juxta præcedentia, est, $3rrxxt - 5x^4t + bbcct = 5y^5$; in quâ si $t$ ponatur omni assignabili major seu infinita, juxta Scholii General. N°. *XII* omnes termini infinito vacui, ut $5y^5$, evanescent; unde, cæteris per $t$ divisis,

sis, emerget $3rrxx - 5x^4 + bbcc = 0$, quæ est æquatio quæsita *maximum* aut *minimum* determinans.

II. Casus, *cum æquatio duas continet in eodem termino indeterminatas* x *&* y, *quarum altera* y *ad extremum aliquod est determinanda.*

Sit æquatio exposita, $x^4 - x^3y + bbxx - cxyy = 0$; erit curvæ hancce æquationem construentis, æquatio subtangentialis $-3xxyt + 2bbxt - cyyt = 2cxyy + x^3y$; & positâ $t$ infinitâ, termini infinito vacui ex Schol. General. *N°. XII.* nihilorum ad instar rejici possunt, unde, reliquis per $t$ divisis, oritur æquatio ad extremum determinata $-3xxy + 2bbx - cyy = 0$; ex quâ, si ad expositam applicetur, tum ipsius $x$, tum ipsius $y$ valor, uti notum est, indagari potest.

§. 4. Quoniam jam in utroque hoc casu æquationem ad *extremum* aliquod determinatam, non nisi termini subtangentem $t$ continentes, cæteris evanescentibus, ingrediuntur; patet in expositâ qualibet æquatione, omissâ indeterminatâ $y$, quæ *extremum* ex hypothesi designat; singulos terminos reliquam indeterminatam $x$ continentes per numerum potestatem ipsius $x$ in quolibet termino exponentem, multiplicandos esse, & hoc facto, ex iis terminis hoc modo

mul-

multiplicatis componi æquationem ad valorem *extremum* ipsius $y$ determinatam.

Quod exhibita modo exempla hoc ritu tractando innotescit. Demonstratio ex Cap. I. §. 17. & 35. haurienda.

*Schol.* Cum autem Nob. *Huddenii extremorum* seu *maximi* & *minimi* methodus, tum hâc, tum aliis hactenus post ipsam inventis, non paucis in casibus; latius pateat ac magis comprehensiva existat, eam quidem ob causam, quod ipsis indeterminatarum potestatibus non adstricta, assumtâ quâlibet progressione arithmeticâ, intentum assequatur; tum primario, quod hujus ope terminus quicunque per cyphram multiplicari, adeoque ex datâ æquatione tolli possit; unde hinc promanantes problematum solutiones generaliores multo ac infinitis quandoque casibus sufficientes evadunt.

Sit Verbi Gr. æquatio ad circulum $2rx - xx = yy$, cujus applicatarum maxima expetitur; habebitur ex præcedenti $2rx - 2xx = 0$ & $r = x$; quod & ex methodo Huddenianâ, uti notum, consequitur: si vero alia juxta eandem methodum assumatur progressio, ac terminus $2rx$ per cyphram multiplicetur, obtinebitur mox $yy = xx$, seu $y = x$.

Quod maximum in circulo sine relatione ad ipsius diametrum, adeoque & locum, ad quem futuræ sunt infinitorum circulorum eodem vertice descriptorum applicatæ maximæ, primâ instantiâ determinat. Operæ pretium mihi facturus videor, si methodi modo traditæ, cum admirando tanti Viri invento convenientiam, insimulq. ipsius hoc fundamento innitentem demonstrationem aperiam.

§. 5. Sit in eum finem æquatio; $x^4 - bx - yyx^3 - ccyxx + bbccx + b^5 = 0$; oportet

valo-

valorem ipſius $y$ ad maximum aut minimum determinare.

Aſſumtis, $d$, & $r$, quarum utraque conſtantis quidem magnitudinis ſed pro arbitrio ſumendæ ſupponitur, ac juxta calculi conditionem nunc negativos, nunc affirmativos numeros ſignificare: ducatur æquatio primò in $d$, ac deinde in $x^r$, ſeu ſimul & ſemel in $dx^r$, numero $r$ ipſius $x$ poteſtatem deſignante; obtinebitur

$$dx^{5+r} - bdx^{4+r} - dyyx^{3+r} - dccyx^{2+r} + bbccdx^{1+r} + db^5 x^r = 0.$$

in quâ, ſi juxta præcedentem, ſinguli termini $x$ continentes per numerum poteſtatem ipſius $x$ exponentem multiplicentur, emerget

$$\overline{5+r}\,dx^{5+r} - \overline{4-r}\,bdx^{4+r} - \overline{3-r}\,dyyx^{3+r} - \overline{2-r}\,dccyx^{2+r} + \overline{1+r}\,bbccdx^{1+r} + rdb^5 x^r = 0,$$

pro æquatione ad extremum determinatâ; quæ ideo per $x^r$ rurſum diviſa exhibebit:

$$\overline{5+r}\,dx^5 - \overline{4-r}\,bdx^4 - \overline{3-r}\,dyyx^3 - \overline{2-r}\,dccyx^2 + \overline{1+r}\,dbbccx + rdb^5 = 0.$$

Adeoque æquationem expoſitam quâlibet progreſſione arithmeticâ juxta leges *Huddeniani* theorematis, multiplicatam.

*Coroll.*

*Coroll.* Patet hinc I. quemlibet expositæ æquationis terminum, Verb. Gr. $yyx^3$, per cyphram posse multiplicari; adeoque ex æquatione ad *extremum* determinatâ tolli, sit enim $-3-r=0$ erit $r=-3$. tum II, quemlibet ex residuis, Verb. Gr. $bx^4$, posse quolibet numero tum affirmativo tum negativo, ut $s$, multiplicari, cæteris ex eo determinationem accipientibus; sit enim $-\overline{4-r}\,d=s$, erit (posito loco $r$ invento valore $-3$) ipsa $s=-7d$, adeoque $d=\frac{-s}{7}$. quæ quidem, ni fallor, ea sunt, quæ methodus *Huddeniana* requirit.

§. 6. III. Casus, *Cum æquatio plures, imò quotlibet, continet indeterminatas, quarum unica* y *ad extremum determinanda est.*

Sit æquatio, $yyf-byz+ccb=0$; oportet ipsius $y$ valorem extremum definire. Quamobrem ex §. 2. ac retentis §. 3. symbolis, juxta Cap. I. §. 35. reperiatur (consideratis scilicet indeterminatis, tanquam curvarum ad eundem axem descriptarum applicatis) ipsius æquatio subtangentialis: $2yyfnl+yyftl-byztn-byzln=0$; & positâ $t$ infinitâ, ac cæteris ex Schol. General *N*°. *XII*. evanescentibus, emerget æquatio quæsita: $yyftl-byztn=0$, seu $yfl-bzn=0$.

*Schol.* Et hæc quidem, cum nullæ amplius supersunt

æquationes, quæ inderminatas $f$ & $z$ ad $y$ aut interceptam communem $x$ limitant; quæ si in promtu fuerint, etiam subtangentes respectivæ $n$ & $l$ ad easdem $y$ aut $x$ referri possunt, adeoque extremum per superiores casus omnino erit determinabile. Elegans Celeberrimi *Leibnitii* exemplum, quem modo recensuimus casum, elucidabit; quod Vir eruditissimus per quantitatum differentialium proprietates resolvit; nos autem ex subtangentis valore infinito, præcedentium in morem, deducemus; cum Cap. I. §. 35. methodum huic negotio inservientem satis, ni fallor, expeditam suppeditet.

§. 7. Sit (*Fig. LXXXI. N°.* 1.) $AE$ superficies dirimens aerem & vitrum; $BC$ radius lucis in $CD$ reflexus, aut in $CF$ refractus; si aer lucis motui resistat ut $r$, vitrum ut $s$, quæritur punctum $C$, in quod incidens radius ex puncto $B$ ac punctum $D$ per reflectionem, $F$ per refractionem, illustrans omnium facillimè, seu vi omnium minimâ munia hæc sua peragere potest?

Sit eum in finem in casu reflectionis $DE:b$, $DC:f$; in casu vero refractionis $EF:b$, & $CF:f$; $AB$ dicatur: $d$, $AC:x$, $AE:c$, unde $CE:c-x$; quarum $b$, $d$, $c$, determinatæ, $f$, $z$, $x$ indeterminatæ existunt, item $BA$ & $DF$ ipsi $AE$ normales.

Quoniam jam ex mechanicis constat, vires requisitas inter se esse in longitudinum emensarum & resistentiæ mediorum ratione compositâ, seu, ut $rz$ ad $sf$; vis utriusque summa exponetur

netur per $rz+sf$; quæ omnium minima hoc in casu expetitur. Sit ergo $rz+sf=yy$ æquatio repræsentans virium summam; in quodcunque etiam superficiei *AE* punctum radius ex *B* inciderit; in quâ, ut $y$ minima reperiatur, (*Fig. LXXXI. N°. II.*) ad interceptam communem *AC*: $x$, ordinatæ concipiantur tres curvæ *AD*, *AB*, *AF*; quarum applicatæ dicantur *CB*: $z$, ejusque subtangens *CK*: $l$; *CD* in casu reflectionis, *CF* in casu refractionis vocentur: $f$, earumque subtangentes *CL* & *CM* pro varia intentione appellentur $n$; tandem in curvâ *POH* sit applicata *HC*: $y$, ejusque subtangens *CI*: $t$; erit posita curvarum inter se relatione $rz+sf=yy$, æquatio subtangentialis earum omnium ex Cap. I. §. 35. $rztn+sflt=2yyln$, in quâ, si $y$ ad extremum sit determinanda, seu ad lineam *ON*, erit $t$ infinita; unde ex Schol. Generalis, *N°. XII.* rejecto $2yyln$, ac divisione per $t$ institutâ remanet $rzn+sfl=0$, pro æquatione determinatâ.

Cum autem hic ad omnimodam problematis determinationem æquationes necessariæ ex datorum naturâ reperiri possint; ac sit I. in triangulo *BAC* in *A* rectangulo, (vide *Fig. LXXXI. N°. 1. & 2.*) $dd+xx=zz$, quæ est ad locum curvæ *BA*, erit ejus subtangentialis $l=\frac{zz}{x}$.

II. In triangulo $DEC$ aut $EFC$ in $E$ rectangulo est $cc - 2cx + xx = ff$, æquatio ad curvam $AD$ aut $AF$, cujus subtangentialis

$$n = \frac{ff}{x - c}.$$

Quarum subtangentium $n$ & $l$ inventus valor si in æquatione $rzn + sfl = 0$ surrogetur, emerget $rfx = csz - xsz$; quæ, loco $f$ & $z$ substitutis valoribus, solam $x$ continebit, adeoque penitus determinata est.

*Corol. I. In Casu Dioptrico*; cum sit $x : c - x :: sz : rf$, si $F$ & $B$ (*Fig. LXXXI. N°. 1*) in ejusdem circuli peripheria sitæ esse intelligantur est $z = f$; adeoqne $x : c - x :: s : r$, seu ut $AC$ ad $CE$ ita resistentia vitri ad resistentiam aëris. Adeoque in casu minimæ obtinet regula *Cartesii* in dioptricis tradita.

*Coroll. II. In casu catoptrico*, cum radius $CD$ maneat in aere, ideoque resistentia non mutetur, erit $r = s$, & $x : c - x :: z : f$, seu $AC : CE :: BC : CD$. Unde cum, ob laterum proportionem & angulos in $E$ & $A$ rectos, triangula $ACB$ & $DCE$ sint similia, patet hoc in casu angulum incidentiæ B$CA$ æquari angulo reflectionis $DCE$.

CA-

# CAPUT. VIII.

## *De Variis Calculi in Analysi infinitorum Generibus, & methodo infinitesimali directâ.*

§. 1. CAlculi *infinitesimalis* fundamentum consistit in considerandis quantitatibus infinitesimis, tanquam fractionibus; quarum denominatores numerum omni assignabili majorem *m* includunt: sic $\frac{r}{m}$ est ipsius *r* pars infinitesima, &c.

§. 2. Hinc, quem lemm. 8, 9, 10. &c. fusè satis tradidimus, omnibus, ni fallor, hactenus adhibitis naturâ prior enascitur *quantitatum infinitesimarum Algorithmus*; unde postea æquationum, ex quantitatibus indeterminatis, seu parte sui infinitesimâ (juxta curvæ quam spectant, aut spectare possunt, naturam) per totam sui longitudinem crescentibus aut decrescentibus constantium, *redactio*, aut si mavis, *reductio ad infinitesimas* juxta Cap. I. §. 1. & 2. aliasque plurimas innotescit.

§. 3. Quod si hæ *fractiones* seu *quantitates* in-

*infinitesimæ* per vocales *a* & *e*, &c. litteras, compendii gratiâ, designentur, oritur tangentium inventioni inserviens *Cl. Barovii* methodus. Videatur Cap. I. §. 3. Schol. II. & §. 4, 5, 6, 7, 8.

§. 4. Si vero eædem quantitates infinitesimæ vocalium & litterarum loco, per indeterminatarum, quas respiciunt, differentias (quæ infinitesimarum naturam nihilo secius retinent) exprimantur, deducitur hinc *Celeberr. Leibnitii* calculus, *differentalis* nomine vocatus, cujus specialem demonstrationem, cum inter præcedentia, superiorum ad instar, expresse non attingatur, hic adjungo. Sint quantitates indeterminatæ quotcunque, $x$, $y$, $z$, $f$, earumq; infinitesimæ respectivæ, $e$, $a$, $u$, $i$, quæ juxta *D. Leibnitii* placita per indeterminatarum differentias, seu $dx$, $dy$, $dz$, $df$, denotentur.

I. Quæritur ipsius $x \mp y$, seu quantitatum ad se mutuo additarum vel á se invicem substractarum, differentiale?

Fiat $x \mp y = z$, quæ æquatio redacta ad infinitesimas (positis nimirum $x+e$ loco $x$, $y+a$ loco $y$, $z+u$ loco $z$, (quod & in sequentibus, semper observatum velim) dabit, $x+e \mp y \mp a = z+u$, & deletis æqualibus, $e \mp a = u$; seu resumtis symbolis *Leibnitianis*, $dx \mp dy = dz$.

II. Quæritur ipsius $xy$, seu indeterminatarum

rum se mutuo multiplicantium, differentiale?

Fiat $xy = z$; quæ superiori modo ad infinitesimas reducta dabunt $xy + ye + xa + ae = z + u$, ac deletis æqualibus, tum & per lemm. 10. rejectaneis, erit $ye + xa = u$; seu juxta D. Leibnitium $ydx + xdy = dz$.

III. Quæritur ipsius $\frac{x}{y}$, seu indeterminatarum se mutuo dividentium, differentiale?

Fiat $\frac{x}{y} = z$, erit $x = yz$, & post redactionem ad infinitesimas & rejecta rejectanea $e = yu + za$; unde posito $\frac{x}{y}$ loco $z$, & æquatione ad $u$ ordinatâ, emerget $u = \frac{ye - xa}{yy}$; & ex notatione differentialium $\frac{ydx - xdy}{yy}$.

IV. Quæritur ipsius $y$ ad potestatem $p$ evectæ differentiale?

Fiat $y^p = z$, quæ ad infinitesimas reducta, deletis juxta Cap. I. §. 10. delendis, dabit $py^{p-1}a = u$, seu $py^{p-1}dy = dz$.

§. 5. Sin autem quantitates indeterminatas *Fluentium* nomine, ipsas vero infinitesimas *fluxiones*, *momenta*, *incrementa momentanea*

*tanea* aptissimo usitatoque *Clar. Newtono* technologemate appellemus, eodem hoc fonte calculi, ab inclyto hoc Authore in profundissimæ eruditionis de *Phil. Nat. Princ. Math.* tractatu adhibiti, demonstratio haurietur.

§. 6. Hisce corollarii ad instar annecti, insimulque confirmari posset, Scholio, §. 13. Cap. II. subnexo, terminos æquationum indeterminatos ad infinitesimas redigendi insinuata, adeoque inde petenda methodus; quæ, licet fractionibus æquationem ac irrationalitatibus liberam postulet, non paucis tamen in casibus terminos differentialium simplicissimos, compendiosè magis, quam modo traditus calculi differentialis algorithmus exhibet.

§. 7. Posset *differentialis* hic *algorithmus* ulterius extendi, ac quantitatum, qui potestatum indices indeterminatos habent, differentialibus assignandis adhiberi.

Quæritur verb. Gr. ipsius $y^x$ differentiale?

Fiat $y^x = z$, ac posito $x+e$ loco $x$, $y+a$ loco $y$, $z+u$ loco $z$, erit $y+a$ ad potestatem $x+e$ evecta $= z+u$, unde multiplicatione instituta, ac rejectis per lemm: 10. rejiciendis, orietur $y^{x+e} + xy^{x+e-1}a = z+u$; ac denuo

nuo ipsi $z$ surrogato $y^{x}$; fiet tandem, $y^{x+e} + xy^{x+e-1} \quad a - y^{x} = u$; jam si loco $a$ & $e$ reponantur $dx$ & $dy$, differentiale quæsitum, juxta designationem *Leibnitianam*, obtinebitur.

*Coroll.* Quod si $x$ fiat determinata $= p$, erit $e = 0$; & prodibit, tanquam casus hujus theorematis particularis, §. 4. *N°. IV.*

*Schol. I.* Posset potestas $x$ etiam ad quamlibet aliam potestatem, tum determinatam, tum indeterminatam evehi; & hæc rursus ad aliam, potestatumque potestates hoc ritu in infinitum continuari; tum & unico pluribusque terminis efferri; sic verb. gr. $y$ evectâ ad potestatem $x$ potest hæc rursum ad potestatem $f$, ac $f$ denuo ad potestatem $rxx + x^{3}$ evehi; unde calculi hujus, tum & curvarum, quæ hactenus non satis consideratæ fuerunt, contemplatio ulterius longe promoveri earumque tangentes (ex more Cap. I. §. 47. &c.) aliaque symtomata inquiri poterunt. Cum autem casus hinc originem ducentes ferme sint innumerabiles, adeoque eorum ad certa quædam capita reductio tantum non impossibilis, præstabit in hisce omnibus methodo potius generaliori uti, cum labor alias insumtus operæ suæ tædium vix compensaturus videatur.

*Schol. II.* Antequam calculum differentialem deseram, celebre ex eo deductum curvarum symptoma, *repetitam* scilicet *differentiationum successionem* silentio prætermittere nequeo. Placuit nimirum quibusdam è clarissimis hujus ævi Mathematicis ipsa curvarum triangula characteristica, (*Fig. LXXXIII.*) *DHE*, *EQC*, *CLI*, differentiationi de novo subjicere, partiumque differentialium differentias, seu infinitesimarum infinitesimas in calculo considerare, apparebat enim, positis *DH*, *EQ*, *CL*, semper æquali-

bus, non tamen *DE*, *EC*, *CI*, fore æqualia, adeoque differentiam quandam inter illas intercedere. Quæ quidem differentiationum continuatio num ex iisdem, quibus differentiatio prima, fundamentis deduci queat, sequenti modo inquisivi

Sit (*Fig. LXXXIII.*) curvilineum *AXy*, sumtâque *AQ* intercepta: *x*, *DQ* applicatâ: *y*, *AD* curva: *c*, subtangenti *TQ*: *t*, tangenti *TD*: *s*; in axe *AZ* accipiantur se mutuo insequentes interceptæ *AP*, *AR*, *AS*, quarum differentiæ sunt infinitesimæ seu omni datâ minores, *QP*: *e*, *PR*: *o*, *RS*: *π*, *Cl. Leibnitio dx* vocitatæ; deinde ad singula axis divisionum puncta si eleventur applicatæ, *PE*, *RC*, *SI*, erunt applicatarum differentiæ *HE*: *a*, *ɑC*: *μ*, *IL*: *ξ*; curvarumque respectivarum, *DE*: *u*, *EC*: *δ*, *CI*: *ζ*; quarum illæ *D. Leibnitio*, *dy*, hæ *dc* nominantur; quæ curvarum differentiæ infinitesimæ versus axem in *T*, *F*, *G*, productæ generabunt infinitesimas, *FT*: *i*. *GF*: *φ*; ac ductis *FK*, *TB5*, *D23*, *E4*, tangentes ad angulos rectos secantibus aliæ rursum orientur infinitesimæ, *GK*: *ψ*, *FB* = *K5*: *λ*, 34 = 2 *E* = *DE*: *u*; 4*C* = *EC* = *δ*.

Jam ob triangulorum *TQD* & *DHE* similitudinem, est.

I. $t : y :: e : a$, seu $TQ : QD :: DH : HE$; unde $ta = ye$.

II. $s : y :: u : a$, seu $TD : DQ :: DE : EH$, unde $su = ya$.

III. $t : s :: e : u$. seu $TQ : TD :: DH : DE$. unde $se = tu$.

Tum ob triangulorum *FPE* & *EɑC* similitudinem est.

IV. $t + e + i : y + a :: o : \mu$. seu $FP : PE :: E\alpha : \alpha C$, unde (per lemm. 10.) $yo = t\mu$.

V. $t + e + i : s + u + \lambda :: o : \delta$. seu $FP : FE :: E\alpha : EC$, unde (per lemm. 10.) $so = t\delta$.

VI. $s + u + \lambda : y + a :: \delta : \mu$. seu $FE : EP :: EC : C\alpha$, unde (per lemm. 10.) $y\delta = s\mu$.

Item ob triangulorum *GRC* & *CLI* similitudinem est.

VII. $s + \psi + \lambda + u + \delta : y + a + \mu :: \zeta : \xi$. seu $GC : CR :: CI : IL$. unde (per lemma 10.) $y\zeta = s\xi$.

VIII. $s + \psi + \lambda + u + \delta : t + \varphi + i + e + o :: \zeta : \pi$. seu $CG : GR :: CI : CL$. unde (ex lemm. 10.) $t\zeta = s\pi$.

IX. $t + i + \varphi + e + o : y + a + \mu :: \pi : \xi$ seu $GR : RC :: CL : LI$, unde (per lemm. 10.) $t\xi = y\pi$.

Hoc

Hoc autem similiter eventurum patet, quotcunque (modo numero finitæ) assumtæ fuerunt infinitesimæ.

*Corol. I.* Manifestum hinc est, quotlibet triangula ex infinitesimis constantia, DHE, EɑC, CLI, &c. (modo numero sint finita) quæ se invicem non interrupta successione sequuntur, inter se & triangulo assignabili TQD esse similia; est enim $t : y :: e : a :: o : \mu :: \pi : \xi$. & sic in cæteris. Demonstratio ex §. præced. Num. I. IV. & IX. levi negotio colligitur.

*Corol. II.* Unde sequitur, posita in triangulis hisce similibus una laterum homologorum æqualium serie, & reliqua latera, homologa homologis, æqualia fore.

Idem hoc ex calculo demonstratur, sint enim omnia $dx$ seu DH, Eɑ, CL constanter æqualia, erit ideo, $e = o = \pi$; adeoque juxta N. I. IV. IX. $ye = ta = t\mu = t\xi$; quare tandem $a = \mu = \xi$, seu omnia $dy$, vel HE, ɑC, LI, perpetuo æqualia.

*Corol. III.* Quod si omnia $dy$ aut omnia $dc$ perpetuo assumantur ejusdem magnitudinis, eodem modo colligetur, hic omnia $dy$ & $dx$, illic omnia $dc$ & $dx$ constanter fore æqualia. Calculum hoc evincentem, cum superiori plane similis sit, omitto.

*Corol. IV.* Ex quibus tandem consequi videtur, cum posita una laterum seu omnium $dx$ semper æqualium serie, omnia quoque $dy$ sibi semper æquentur, ac omnia $dc$ (juxta Corol. II.) nullam inter ipsa $dy$ aut $dc$, si numero sint finita, intercessuram differentiam, cum æqualium nulla sit differentia; unde hoc saltem principio, quo omnia, ni fallor, reliqua calculi infinitesimalis genera deduci possunt, *differentiationum secundarum tertiarum &c. ultra primam continuationes* demonstrari nequeunt.

Ne autem hoc demonstrationis genere in re tanti momenti quispiam offendatur, cum per modum inductionis intentum evincere studeat, aliam adjungo; quem in finem sequentia præmitto lemmatica:

*Lemm.* I. Si quotlibet, modo numero finitæ, infinitesimæ ad se mutuo addantur, earum summa erit quantitas infinitesima: evincitur ex lemm. 8. vel etiam hoc modo: sint

sint quantitates quotlibet assignabiles, sed numero finitæ $b+c+d+g$ &c; quæ (posito $k$ pro numero quolibet finito quantum libet magno) sint $= kq$. erit & $q$ quantitas assignabilis; jam si sumantur singularum partes infinitesimæ, erit earum summa $\frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m} + \frac{g}{m}$ &c. $= \frac{kq}{m}$, seu æqualis parti infinitesimæ ipsius $kq$.

*Lemm.* II. Sint infinitesimæ, numero infinitæ, ac sibi mutuo æquales, erit earum summa æqualis quantitati assignabili; sic infinitesima $\frac{r}{m}$ infinities sumta est $= \frac{mr}{m} = r$, seu quantitati assignabili.

*Lemm.* III. Sint tres quantitates, *A*, B, C, quarum *A* est minima, C maxima, *B* inter utramque magnitudine media. Dico si *A* & C sint assignabiles, etiam *B* fore assignabilem, hoc est nec infinitam nec infinitesimam.

*Demonstr.* Si neges, sit primò *B* infinita, ergo C finita & assignabilis, erit major ipsâ *B* infinita, quod absurdum. Secundò, sit infinitesima, ergo dabitur quantitas assignabilis *A* minor quantitate infinitesimâ B, contra lemma 7.

*Lemm.* IV. Sint infinitesimæ quælibet numero infinitæ, erit earum summa *B* æqualis quantitati assignabili. *Demonstr.* si enim omnes supponantur æquales maximæ, erit earum summa C quantitas assignabilis juxta lemm. hujus II. sin vero supponantur æquales minimæ, erit quoque summa earum *A* quantitas assignabilis juxta lemma II. hujus; unde cum summa *B* media sit magnitudine inter *A* & C, & harum utraque sit assignabilis, erit & juxta lem. præced. summa *B* assignabilis. Sed ad rem.

Resumtis iisdem symbolis, ac *Fig.* LXXXIII. sit $VT:b$, $QZ:z$, $W\Lambda:b$, erit $ZW = y+b$, $WY$ sit $e$, & $XY:x$, erit propter triangulorum TQD & DHE similitudinem æquatio prima $ye = ta$; insuper & ob triangulorum $VZW$ & $WYX$ similitudinem, est $VZ:ZW::WY:YX$ seu $b+t+z : y+b :: e : x$ unde $bx+tx+zx = ye+be$, pro æquatione secundâ. Ex quibus sequentia deducuntur.

*Corol.* I.

*Corol. I.* Cum DH ac $WY$ seu omnia $e$ aut $dx$ sint æqualia, ex hypothesi, si $t$ seu TQ sit assignabilis, QZ vero seu summa ipsarum $dx$, aut $z$, constet numero infinitesimarum finito, erit juxta lemm. hujus I. $z$ infinitesima; quam ob causam & $h$ ac $b$, (cum easdem, non plures saltem, numero infinitesimas, ac $z$, ex constructione contineant) pariter futuræ sunt infinitesimæ; unde per lemma 10. termini $hx$, $zx$ & $be$ nihilo fient æquales, remanebitque $ye = tx$; quamobrem, cum ex æquatione prima sit $ye = ta$, erit $a = x$; unde idem, quod Schol. hujus II. Corol. II. evictum fuit, denuo sequitur: nimirum, si omnia $e$ seu $dx$ sunt æqualia, omnia $a$ seu $dy$ fore æqualia, quin & cætera, illic loci per methodum inductionis tradita, hinc legitimè colligi possunt.

*Corol.* II. Si vero tum $z$, tum $h$, tum $b$, constent numero infinitesimarum infinito, erunt singulæ harum juxta lemm. IV. hujus, ex quantitatum assignabilium genere; quare nullus in æquatione secundâ terminus evanescit, & hoc solo in casu, positis, ut supra, $dx$ æqualibus, inter ipsa $dy$ intercedet differentia; assumtâque $a$ majori ipsâ $x$, erit $a - x = \frac{ye}{t} - \frac{ye - be}{h + t + z}$.

Cujus differentiæ proprietates accuratius indaganti patet ipsam esse natura suâ quantitatem *infinitesimam*, seu termino Leibnitiano, *differentialem*, neutiquam vero *infinitesimæ infinitesimam*, aut *differentio differentialem*; quod tamen, si calculus differentialis quantitatibus purè differentialibus juxta celeb. *Leibnitium* applicari debeat, requiri videtur. Nisi alio (uti credibile est) prorsus fundamento sua deduxerit Vir eruditissimus.

*Schol.* III. Sedulo discrimen hoc attendendum restat, num infinitesimæ, si unâ plures simul considerandæ veniant, numero sint finitæ, num vero infinitæ, cum hac quidem cautelâ accuratè adhibitâ plurimæ objectiones, quibus calculus quilibet infinitesimalis urgeri alioquin videtur, sponte dispareant; neglectâ vero, non exiguam quandoque confusionem inducant.

C A-

# CAPUT. IX.

## *De Æquationum in Analysi infinitorum naturâ, & proprietatibus quibusdam.*

§. 1. ÆQuationes indeterminatas (hoc enim nomine in locorum doctrinâ passim notæ sunt) vulgaris considerat Analysis; quæ duplici viâ ad infinitesimales reducuntur, vel *Primo* ponendo $x \pm e$ loco $x$ &c. juxta modum §. 1. & 5. Cap. I. traditum; sic æquatio indeterminata circulum spectans $2rx - xx = yy$ hac ratione abibit in sequentem infinitesimalem $re - xe = ya$. vel *secundo* integram æquationem per cujuslibet indeterminatæ pro arbitrio sumtæ infinitesimam multiplicando, sic ducendo præcedentem in $a$ emerget $2rxa - xxa = yya$.

Notari potest, quarumlibet aliarum indeterminatarum $z$ & $f$ infinitesimas $u$ & $i$, modo hæ suas indeterminatas toties ingrediantur, quoties $e$ ipsam $x$ aut $a$ ipsam $y$, (quæ conditio in simili casu perpetuo requiritur) hic adhiberi posse.

§. 2. Ex-

§. 2. Exortæ hinc *æquationes infinitesimales.*

I. Terminorum infinitesimalium additionem aut substractionem patiuntur, quod satis notum est.

II. Dividi ac multiplicari instar aliarum possunt per quantitates determinatas, indeterminatas, ac infinitesimas, neque ulla in his difficultas est, nisi forsan in posteriori casu.

Si enim $re - xe = ya$; dividatur per $e$, erit $r - x = \frac{ya}{e}$; adeoque tota fit indeterminata; ipse siquidem terminus $\frac{ya}{e}$ ex lemmate 12 assignabilis est, non vero infinitesimus; tum infinitesimæ ex more præcedentium per aliunde conquisitam æquationem tolli possunt.

Sin autem $re - xe = ya$ per infinitesimam $a$ multiplicetur, fiet $rae - xae = yaa$; ex qua, licet omnes termini ex lemm. 10. evanescant, non pauca tamen quantitates positivas concernentia deduci possunt, mediante hoc ex ipsâ infinitesimarum naturâ profluenti lemmate.

§. 3. Si quotlibet in se mutuo ductæ infinitesime verb. gr. $aae^3i$, rursum dividantur per alias in se invicem multiplicatas infinitesimas, verb. gr. $e^4i$, quarum numerus præcedentium numero unitate minor est, quod emerget $\frac{aa}{e}$

erit

erit quantitas infinitesima. *Demonstratio* ex iis, quæ scholio generali tradita sunt, facillime consequitur; sit enim $a = \frac{f}{m}$, & $e = \frac{b}{m}$, est $\frac{aa}{e} = \frac{ff}{bm}$, seu infinitesima pars ipsius $\frac{ff}{b}$.

§. 4. Resumta jam modo inventa æquatio $rae - xae = yaa$ dividatur per $e$, fiet $ra - xa = \frac{yaa}{e}$, quare *Fig. LXXXVII.* vocatis $AQ : x$, $QM : l$, $DH : e$, $HE : a$, $MN : o$; $BD : \mu$. inter infinitesimas hoc modo quæratur lineola ipsi $\frac{aa}{e}$ respondens; cum sit $BH : HE : HE : HI$, seu $\mu + e : a :: a : \lambda$ erit (ob ipsius $\mu$ seu $BD$ juxta lemm. 41. nullitatem) $\frac{aa}{e} = \lambda = HI$; adeoque $ra - xa = y\lambda$; sed $EH : HI :: EP : PN$. seu $a : \lambda : y + a :: l - e + o$, quare, rejectis per lemm. 10. rejectaneis, $y\lambda = la$, quæ ad æquationem modo inventam applicata dabit $r - x = l = QM$, ut decet. Posset æquatio $re - xe = ya$ per plures infinitesimas multiplicari, unde aliarum linearum determinabilium magnitudo innotesceret. Cum autem inter mox secutura, plurima huc spectantia reperiantur, poterunt inde peti, quæ hujus theorematis illustrationi exempla inserviunt.

§. 5. III. Æquationes infinitesimales, manen-

nente utrinque æqualitate, ad quaslibet potestates evehi possunt; sic æquatio $re - xe = ya$ quadratè multiplicata dabit $rree - 2rxee + xxee = yyaa$, quæ divisa per $e$, dabit $rre - 2rxe - xxe = \frac{yyaa}{e} = yy\lambda$; jam autem $TP : PN :: DH : HI$. seu $t + e : l - e + o :: e : \lambda$; unde $le = t\lambda$: quæ ad inventam æquationem applicata, ejectis infinitesimis, dabit $t : l :: yy : rr - 2rx + xx$, adeoque rationem subtangentis ad subnormalem.

Sit refentis iisdem symbolis, ac Figurâ, æquatio omnibus curvis conveniens, $le = ya$; quæ multiplicata cubicè dabit $l^3 e^3 = y^3 a^3$, ac rursum per $ae$ divisa, $l^3 \frac{ee}{a} = y^3 \frac{aa}{e}$; jam cum $HI$ seu $\lambda$ sit $= \frac{aa}{e}$, erit $HA = \frac{ee}{a}$, quæ vocetur $\pi$. Adeoque erit $l^3 : y^3 :: \lambda : \pi :: HI : HA$. inventis jam $\lambda$ & $\pi$ inter quantitates infinitesimas, si desideremus lineas homologas inter quantitates assignabiles, ipsi $TD$ ducta normali $TW$, donec productam $DQ$ in $M$ secet, vocetur $QW : n$, erit $HI : HA :: QM : QW$, seu $\lambda : \pi :: l : n :: l^3 : y^3$.

Possunt hæc variis casibus applicari, plurimarumque hinc linearum rationes inveniri, ac curvilineorum solidorumque nondum penitus exhaustæ proprietates aliquatenus ampliari.

T De-

Depressionem æquationum infinitesimarum per radicum extractiones, cum sine quadam præparatione eandem tolerare non videantur, hic transeo.

§. 6. Æquatio infinitesimalis, verb. gr. $re - xe = ya$, si singuli ejusdem termini infinities, ac juxta conditionem Cap. II. §. 12. expressam sumantur, mutatur in æquationem *collectivam*, seu apposito termino *Leibnitiano*, *summatricem*, sic omnia $re$ — omnia $xe$ = omnia $ya$, est æquatio *Collectiva* sive *summatrix*. Harum exempla in superioribus passim occurrunt.

*Schol.* Clarum hinc est, ex datâ qualibet æquatione infinitesimali & collectivam ipsius legitime consequi; licet ex collectivâ quâlibet infinitesimalis per regressum deduci semper nequeat. Sic resumta *Fig.* XXVI. positisque $QD:y$, $QP:e$, $DI:x$, $GI:a$, idem curvilineum $AFO$ tum per omnia $ye$, tum per omnia $xa$ exprimetur, unde quidem omnia $ye$ = omnia $xa$; non tamen sequitur fore in singulis trapezium $DQPE$ seu $ye$ semper æquale trapezio $DIGE$ seu $xa$, quod notetur ad errores præcavendos.

CA-

# CAPUT. X.

## *De Methodo Infinitesimali inversâ.*

SInt $x, y, f, z$, indeterminatæ; ac $e, a, i, u$, infinitesimæ ad ipsas respectivè pertinentes.

§. 1. Quæritur indeterminatus terminus, ad quem terminus infinitesimalis constans, ex quantitatibus determinatis & infinitesimâ quâcunque, ut $rre$, $ba$ &c. reduci potest? loco infinitesimæ $e$ aut $a$ surrogetur quantitas respectiva indeterminata $x$ aut $y$, & habebitur terminus quæsitus $rrx$ aut $by$.

§. 2. Quæritur idem; si terminus infinitesimalis præter determinatas, si occurrant, ac infinitesimam, etiam indeterminatas, sed ad infinitesimam tantum relativas, contineat: ut $rrxxe$, $y^3a$, &c? ipsi infinitesimæ $e$ aut $a$ sufficiatur indeterminata relativa $x$ aut $y$; ac quod emergit, per ipsarum $x$ aut $y$ potestatis exponentem dividatur, & obtinebitur $\frac{1}{3}rrx^3$ & $\frac{1}{4}y^4$. *N. B.* potuisset uterque hic casus, tanquam terminos infinitesimales proprios spectans, unico canone determinari.

§. 3. Quæritur terminus indeterminatus, si expositus infinitesimalis præter determinatas &

infinitesimam alias insuper indeterminatas, sed ad infinitesimam neutiquam relativas, contineat, ut $rrxxy^3a$, $z^3ffxxe$?

Et hactenus tantum responderi posse videtur, per supra tradita nec has nec ullum terminum infinitesimalem alienum, si solus hoc modo exponatur, reducibiles existere; ac non nisi ipsum tot comitentur termini infinitesimales, quot juxta Schol. Cap. II. §. 13. subjunctum requiruntur.

§. 4. Ut vero, exposità terminorum infinitesimalium multitudine, verb. Gratia, $ffxxa + 5ffxye + 2xxyfi$, dignosci possint, quinam sint reducibiles: sumatur quilibet ex hisce terminis $2xxyfi$, cujus pars $fi$, (quæ, si indeterminatis aliis juncta non foret, infinitesimalem proprium constitueret) instar termini infinitesimalis proprii juxta §. 2. hujus reducatur in $\frac{1}{2}ff$, ac loco $fi$ substituatur, habebitur $xxyff$; qui redactus juxta præcedentia ad infinitesimas dabit, $2xxyfi + 2ffyxe + ffxxa$; unde patet totam terminorum expositam multitudinem, excepto $3ffxye$, ad indeterminatum $xxyff$ esse reducibilem.

Demonstratio præcedentium è locis sat multis & Cap. II. §. 13. Scholio peti potest.

§. 5. Cognito jam, quinam sint termini infinitesimales ad congruos indeterminatos reducibiles, habebitur eo ipso omnium æquationum in-

infiniteſimalium (modo termini eas conſtituentes ſint vel proprii, vel alieni legem Schol. Cap. II. §. 13. adimplentes) ad ſuas indeterminatas reductio. Cumque ex Cap. II. §. 13. termini infiniteſimales collective ſeu toties ſumti, quoties infiniteſima quævis indeterminatam quantitatem, quam componit, ingreditur, ſint æquales valori abſoluto termini indeterminati, unde originem duxerunt; variarum hinc æquationum collectivarum, reductio ad indeterminatas enaſcitur, & ex dato valore infiniteſimalium collectivo, earundem valorem abſolutum multis in caſibus reperiendi methodus.

*Ex. I.* Sit æquatio collectiva, omnia $re$ — omnia $xe$ = omnia $ya$; erunt, juxta §. 13. Cap. II. omnia $ya = \frac{yy}{2}$; ergo omnia $re$ — omnia $xe = \frac{yy}{2}$; quod æquationis genus quodammodo *mixtum* appellari poteſt, cum altera pars ſit collective infiniteſimalis, altera abſoluta & indeterminata, tum & omnia $re$ — omnia $xe$ $= rx - \frac{1}{2}xx$; adeoque ex modo propoſita collectiva infiniteſimali oritur hæc indeterminata, $2rx - xx = yy$.

*Ex. II.* Sit (*Fig. LXXXVI.*) vocatis $AQ:x$, $TQ:t$, $AT:f$, $DH:e$, $EH:a$, curva $ADE$ ejus naturæ, ut exiſtentibus $p$ & $q$ determina-

tis, sit perpetuo $p:q::f:y$, unde $qf = py = qx - qt$; & ductis omnibus in $a$, erit $pya = qxa - qta$; ac loco $ta$ posito $ye$, erit $pya = qxa - qye$; & addito utrinque $2qye$, ac omnibus collective sumtis, emerget post transpositionem omnia $2qye =$ omnia $qxa +$ omnia $qye -$ omnia $pya$; adeoque (cum altera hujus æquationis pars sit reducibilis per hujus §. 2. & 4. ad $qyx - \frac{1}{2}pyy$) tandem, juxta Cap. II, §. 13. evadet $\frac{1}{2}xy - \frac{pyy}{4q} =$ omnia $ye =$ trilineum $AEP$, unde & hujus quadratura innotescit.

Potuisset ipsa alio modo inveniri; si enim inventæ æquationi $pya = qxa - qye$ addatur utrinque $qxa$, erit $pya + qye + qxa = 2qxa$; quibus collective sumtis, ac juxta §. 2. & 4. hujus reductis orietur ex Cap. II. §. 13. $\frac{\frac{1}{2}pyy + qyx}{2q} =$ omnia $xa =$ trilineum $KAE$.

*Scholium* Notetur reductionem hanc supponere indeterminatas $x$ & $y$ &c. nullâ sui parte determinatas esse, sed meris infinitesimis ab initio ad finem per totam sui longitudinem componi; & eodem quidem modo, quod circa Cap. I. §. 12. expresse monuimus; tum & æquationes ex reductione resultantes terminum nullum omnino determinatum admittere. Si enim infinitesimæ sine ullâ ad indeterminatas suas limitatione accipiantur, una eademque infinitesimalis æquatio varias quandoque curvarum species respiciet.

Quod ut breviter ostendam, sit æquatio infinitesimalis $2ya = 2xe$, quæ collective sumta dabit omnia $2ya =$ omnia

nia $2xe$; & juxta præcedentia reducta exhibebit $yy = xx$, ac extractâ radice $y = x$; unde primo hæc æquatio infinitesimalis *Fig. LXXXIV.* ad triangulum verb. gr. $RPW$ (in quo, $RQ:x$, & $QS:y$,) reducitur.

Si vero inventæ æquationi, $yy = xx$, determinata quantitas $rr$ sub quolibet signo addatur, erit, ex. gr. $yy = xx - rr$ ad hyperbolam; ad quam eadem hæc infinitesimalis secundo referri potest, positis enim in eadem figurâ $RA:r$, $RQ:x$, $QD:y$, $QP:e$, $EH:a$, sit curva $ADE$ Hyperbola, unde ipsius æquatio $xx - rr = yy$, quæ reducta ad infinitesimas dabit $2xe = 2ya$.

Unde positis $RP$ in $PW$, $RQ$ in $QS$ &c, tum $EP$ in $EF$ ac $DQ$ in $HK$ &c. erit $EPF$ triangulum = omnia $ya = \frac{1}{2}yy$; tum trapezium $AGWP$ = omnia $xe$, adeoque hic reductio omnium $xe$ ad $\frac{1}{2}xx$ locum non habet, hâc quidem de causâ, quod $RP$ seu $x$ non in totum, sed parte solummodo sui $AP$ ex infinitesimis $PQ$, $QL$, $LC$, &c. seu infinitis $e$ componatur; residuâ nimirum portione $RA$ determinatâ manente, quare hoc in casu omnia $xe$ seu trapezium $AGWP$ æquatur $\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}rr$.

*Tertio*, Sit jam $QP:x$, eaque supponatur crescere per $QL$ &c. seu $e$; ac $QD:y$ decrescere per $DZ:a$; exponaturq. quadrantis circuli æquatio $rr - xx = yy$, dabit hæc infinitesimalem $-2xe = -2ya$ &. mutatis signis, $2xe = 2ya$; sunt autem (positâ $QP$ in $QX$, &c. omnia $xe$ = triangulo $PCV$, ac his æqualia omnia $ya$ (si quidem $y$ perpetuo [illegible] $DB$, $HK$, $NO$ ponatur) constituent trapezium $E34F$ seu $\frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}yy$.

Unde patet quamlibet æquationem infinitesimalem, simpliciter sine restrictione propositam, unam determinatam curvam non respicere: cum manente eadem infinitesimali, post reductionem quantitates quælibet determinatæ multis modis æquationi adjungi queant, quorum tractationem magis accuratam, cum plus requirat temporis, quam mihi mea impræsentiarum permittunt negotia, aliorum indagini ulteriori relinquo, hoc addo:

§. 6. Sit æquatio quælibet infinitesimalis, $rxe - yye = 3yya$; quæ collective sumta, si altera pars $3yya$ ex §. 2. hujus reducatur, abit in collective mixtam (vid §. 5. exempl. I.) omnia $rxe$ — omnia $yye = y^3$, quæruntur hinc termini infinitesimales collectivè sumti, qui valorem ipsius $y^3$ per quaslibet indeterminatas verb. gr. $f^3$ multiplicati aut divisi, seu ipsum $y^3 f^{\mp 3}$ adæquent. Quod quomodo obtineatur in casu multiplicationis, sequens docebit theorema: terminis expositis infinitesimalibus $rxe - yye$, per $f^3$ seu quantitates indeterminatas prius multiplicatis, pars æquationis expositæ absoluta $y^3$ per terminum infinitesimalem $3ffi$ ex $f^3$ oriundum multiplicata, cum suo signo legitimo addatur; & summa hæc infinitesimalium collective sumta æquabitur quæsito valori absoluto $y^3 f^3$.

Sic, ut in eodem maneamus exemplo, ex inventa æquatione omnia $rxe$ — omnia $yye = y^3$, sequitur omnia $rxf^3e$ — omnia $yyf^3e$ + omnia $3y^3ffi$ fore æqualia valori absoluto $y^3 f^3$.

*Demonstratio.* Cum enim (ex Cap. II. §. 13) sit $y^3 f^3$ = omnia $3yyf^3a$ + omnia $3y^3ffi$ = omnia $rxf^3e$ — omnia $yyf^3e$ + omnia $3y^3ffi$; si collectiva hæc ad infinitesimalem deprimatur

T (fieri

( fieri enim hoc posse supponimus ) ac per $f$ dividatur, redibit æquatio exposita.

*Coroll.* Quomodo hoc divisionibus, per ipsius $f$ exponentem negativum, accommodetur; tum & in radicum extractionibus ac potestatum ad altiores gradus evectionibus ( quæ multiplicationis ac divisionis species quædam sunt ) usui esse queat, quilibet hinc eruet.



# CAPUT XI.

## Miscellanea.

PReparatio Communis. Sit, *Fig. LXXXV. LXXXVI.* &c. curva, *ADE*, cujus applicata $DQ:y = TI$, intercepta, $AQ:x$, subtangens $TQ:t$, cujus abscissa $TA:f$, tangens $TD:s$, infinitesimæ $QP = DH:e$, $HE:a$, $DE:u$, $FT:i$.

§. 1. Satis jam notum est, si *Fig. LXXXV.* & *LXXXVI.* $HM$ sit $= TQ = t$, trilineum $PEL$ seu omnia $ta$, æquari trilineo $AEP$, seu omnibus $ye$; spatium vero $PLO$, seu complementum trilinei $PEL$, semper æquari summæ vel differentiæ trilineorum $APE$ & $AFG$, nescio an adhuc animadversum sit; illud obtinet, si curva $ADE$ (*Fig. LXXXV.*) versus axem concava sit; hoc si versus axem (*Fig. LXXXVI.*) convexa sit.

*Demonstr.* Cum ex hypothesi sit perpetuo $HM = QT$, & $EL = FP$, erit $ZL$ (*Fig. LXXXV*) $= NO = e + i$; sed in *Fig. LXXXVI.* $= e - i$; adeoque cum in utroque casu sit $MN = y$, erit curvilineum $POL$ in primo = omnia $ye + yi$, in secundo = omnia $ye - yi$; unde cum $APE$ sit = omnia $ye$, ac $AGF$ = om-

omnia $yi$, patet propositum. Posset idem more vulgari ex figurarum æquivalentia demonstrari.

*Schol.* Hinc, si curva in $A$ cum axe $AQ$ concurrat, posset erui curvaturæ diagnosticum; cum si curva existat versus axem concava sit $t = x + f$; si vero sit convexa, evadat $t = x - f$. verum hæc Capite I. ex professo tractavimus.

§. 2. Sit $r$ determinata, ac $t : y :: e : a :: z : r$, erit $za = re$; adeoque, si (*Fig. LXXXV.*) $r$ in $BQ$ applicetur ad $e$, ac $z$ in $HM$ ad $a$, erit spat. $HPM$ = omnia $za$ = omnibus $re$ = rectangulo $BQSA$, $= rx$, quod ab aliis jam demonstratum est; ast spatium $PMN$ semper adæquari rectangulo $ASCT$ nondum observatum memini.

*Demonstratio* facilis est; cum enim ex hypothesi sit $zy = rt$ seu rectangulum $HMNP$ = rectangulo $QBCT$, ac spatium $PHM$ = rectangulo $QBSA$, erit spat. $PMN$ = rectangulo $ASCT$. *q. e. d.*

Idem ex infinitesimali calculo evincitur; sit enim $NO$ ipsius $z$ infinitesima $= o$; erit, æquatione $zy = rt$ ad infinitesimas redactâ; $za + yo = re + ri$; unde cum sit $re = za$ remanebit $yo = ri$, quare omnia $yo = PMN$ = omnia $ri = rf$ = rectangulo $ASCT$.

§. 3. Sit $t : y :: e : a :: r : z$, erit $ze = ra$, tum $zt = ry$, quæ redacta ad infinitesimas, (si curva,

va, ut in *Fig. LXXXVI.* sit versus axem convexa ) dabit $ra = to + ze - zi$; unde quia $rd = ze$, erit $to = zi$; quare si $z$ jugiter in $TS$ ad $FT$ seu $i$ applicetur, erit $SV = i$, & $VW = o$; jam, cum sit $to = zi$, erit $o : i :: z : t$, seu $VW : VS :: TS : TR$, quare curvæ $ASW$ hoc modo generatæ subtangens $TR$ semper æquabitur curvæ expositæ $ADE$ subtangenti $TQ = t$.

Quod notabile, videtur cum omnibus curvis, habitâ curvitatis & signi ipsa $e$ & $i$ copulantis ratione, competat.

*Schol.* Qua jam ratione variæ curvarum proprietates, omnibus curvis communes, per aliarum rectarum curvas in genere spectantium (tangentium, subtangentium, normalium, subnormalium &c.) infinitesimas erui, ac adhibitâ, quam capite I. tradidimus, tangentium methodo, non paucis theorematum generalium accessionibus, quæ particulari cuidam curvæ alligatæ non sunt, Geometria locupletari valeat, satis hinc manifestum est; suffecerit digitum intendisse.

§. 4. Sit Figura LXXXVI. curva $ADE$ ejus proprietatis, ut subtangentis abscissa $AT : f$, ad tangentem $TD : s$, constantem habeat rationem, ut $p$ ad $q$; erit $qf = ps$, sed propter triangulum $TQD$ rectangulum est $tt + yy = ss$

in

in quâ æquatione posita $s = \frac{qf}{p}$ erit $pptt + ppyy = qqff$; quæ redacta ad infinitesimas ac per 2 divisa dabit $ppte - ppti + ppya = qqfi$; factaq; $ta = ye$ juxta sæpius ostensa, $ppt te - ppt ti + ppyye = qqfti$; rursumque posito $ss = tt + yy$ ac $qqff = ppss$ fiet tandem $qqffe = qqfti + pptti$, quæ æquatio cum ipsarum $f$ & $t$ infinitesimas $e$ & $i$ contineat, si applicetur $TQ$ seu $t$ in $TS$ erit $SV = i$ & $VW = e - i$, curvæque $ASW$ hinc emergentis subtangenti $RT$ vocatâ $n$, erit $RT : TS ::$ $SV : VW$ seu $n : t :: i : e - i$; unde $te - ti = ni$; ex quâ, mediante inventa modo æquatione ejectis infinitesimis, invenietur $RT = n = \frac{qqfft}{qqft + pptt - qqff}$; unde datâ methodo tangentium inversâ dabuntur curvarum $AS$ & $AD$ constructiones.

§. 5. Sit, *Fig. LXXXVII.* curva $ADE$, cujus subnormalis $QM$ vocetur $l$, normalis $DM : k$, recta $DR$ ex puncto curvæ $D$ juxta datam quamlibet conditionem ducta, axemque $AQ$ productum in $R$ secans producatur versus $V$, dicaturque $DR : p$, ac $MR : h$; erit $QR = l + h$, quæ compendii gratia appelletur: $b$; quod si, ductâ $FE$ curvam in puncto $E$ ipsi $D$ proximo tangenti, idem fiat respectu appli-

catæ

catæ *EP*; ac sit *ES* axem in *S* secans linea eandem ad punctum *E* lineasque ad ipsum respectivas relationem habens, quam habet *DR* ad punctum *D*, lineasque hoc ipsum similiter spectantes; supposito jam lineas *DR* & *DS* protractas in *V* sibi mutuo occurrere, idemque fieri ductis similibus lineis ex omnibus curvæ *ADE* punctis, erit punctum *V* ad novam hinc ortam curvam *VW*; cujus natura quæritur & constructio.

Quem in finem, productâ *DH* utrinque in *B* & *O*, dicantur *HI*: $\lambda$, *HO*: $\varphi$, *MN*: $\iota$, *RS*: $\varkappa$, quarum singulæ juxta lemma 41. sunt infinitesimæ, *BD* vero appelletur: $\mu$. tandem sit *DV*: $z$ erit *R*V $= z - p$. Jam ob triangulorum *DO*V & S*R*V similitudinem est *OD*: *D*V:: S*R*: *R*V. seu $e + \varphi : z :: \varkappa : z - p$, unde $ze + z\varphi - pe - p\varphi = z\varkappa$, (signetur *X*.) tum &, ob rectarum *BO* & *FS* parallelismum, est *BH*: *HO*:: *FP*: *P*S. seu $\mu + e : \varphi :: t + e + i : b - e + \varkappa$, unde cùm *BD* seu $\mu$ ex lemm. 41. nihilo æquivaleat, amotis juxta lemm. 10. rejiciendis, fiet $be = t\varphi$; quæ cum inventâ modo æquatione litterâ X notatâ si ad $\varphi$ determinetur, ex utraque orietur $bze - bpe - pte + tze = tz\varkappa$, (signetur *Y*) hæc autem cum infinitesimas $e$ & $\varkappa$ adhucdum contineat, alia reperienda est æquatio, cujus ope tolli possint, quæ

juxta

juxta præcedentia, sequenti modo acquiritur; statuatur $b$ seu Q$R$ in Q$G$, & $P$S in $PL$, donec per earum extremitates nova curva $AGL$ describi possit, erit $GK = e$ & $KL = P$S $-$ Q$R = x - e$; quare Q$C$ ipsius curvæ $AGL$ subtangenti vocatâ: $n$, fiet Q$C$: Q$G$:: $GK$: $KL$. seu $n$: $b$:: $e$: $x - e$. adeoque $nx = be + ne$; quæ ad æquationem litteram $Y$ signatam applicata, exhibebit $z = \frac{pbn + pen}{bn - bt}$.

Unde cognitâ $D$V seu $z$ tum longitudine tum positione, datur punctum V in curva V$W$, adeoque hujus constructio; & si placuerit, etiam relatio ad axem $A$S, juxta methodum Cap. V. §. 12. circa evolutas insinuatam.

Generali hoc theoremate plurimarum curvarum examen institui ac constructio effici potest.

*Corol. I.* Posita enim ipsa $b$ æquali nihilo, erit $b = l$, & $p = k$, rectæque $DR$ & $DM$ item $E$S & $EN$ coincident; eritque V$W$ ipsius $AE$ evoluta ac $z = \frac{kln + ktn}{ln - lt}$, uti Cap. V. §. 11. Cor. I. inventum.

*Corol. II.* Si vero $DR$ juxta aliam quamlibet conditionem ducta sit, & repræsentet verb. gr. viam radii, post refractionem in superficie curvæ $ADE$ versus $R$ tendentis, erit V$W$ curva á radiis post refractionem concurrentibus formata.

*Corol. III.*

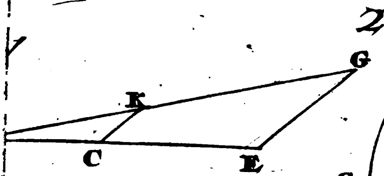
*Corol. III.* Quod si *D R* cum recta *D M* faciat angulum *R D M* = *M D Q*, erit V *w* curva ex radiis Q *D* & *P E* sibi mutuo parallelis, ac ad speculum concavum *A D E* reflexis, oriunda.

*Corol.* IV. Unde cum conditio hæc infinitis modis varia esse possit, juxta cujus leges linea *D R* duci potest; infinitarum, quæ hisce modis generantur curvarum V *W* constructiones evolutarum, catacausticarum, diacausticarum &c. unico hoc theoremate expediuntur. Particularia, cum post inventum hunc canonem plus requirant laboris, quam industriæ, transilio; uti & casum, quo intersectio V cadit ab altera axis parte.

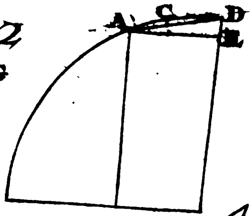


FINIS.

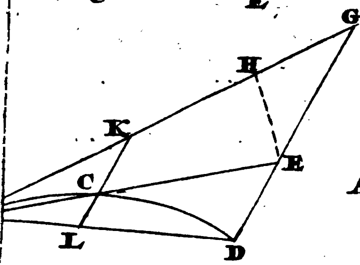
b: 3



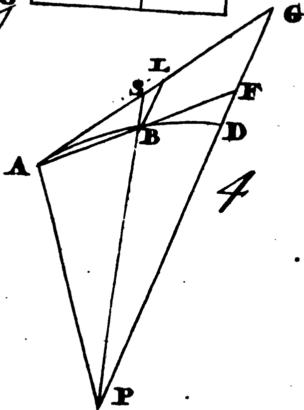
1
G
K
C
E

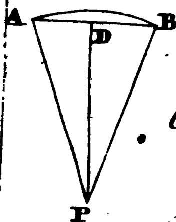
2
A
C
D
E

G
H
K
E
C
L
D

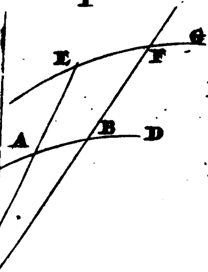
G
L
S
F
B
D
A
4
P

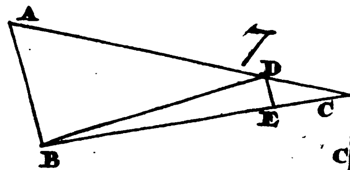
A
B
D
P



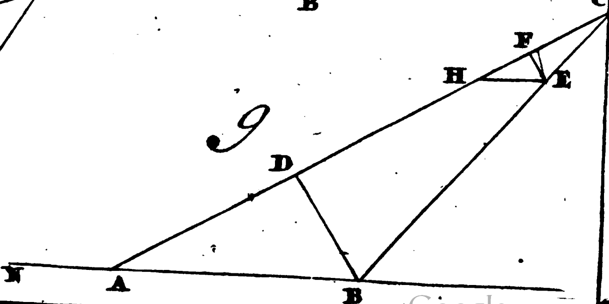

6
A
B
P

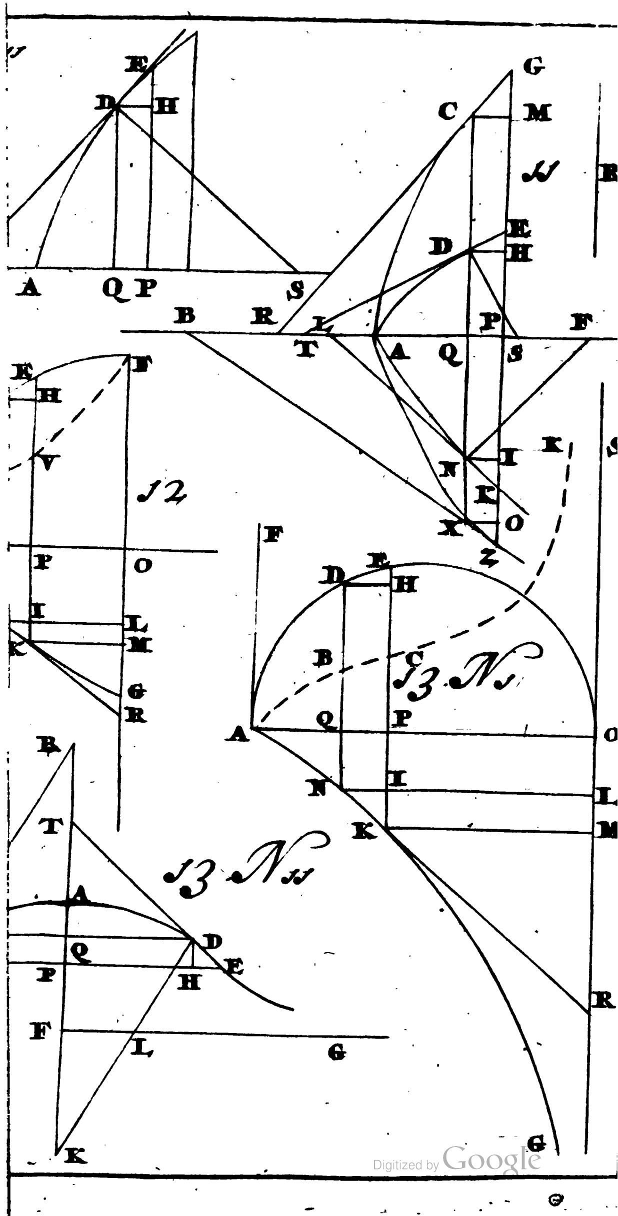
E
G
F
A
B
D

A
7
D
E
C
B

C
F
H
E
9
D
N
A
B



E
D
H
A
Q
P
S
G
C
M
E
D
H
B
R
L
T
A
Q
P
S
F
E
H
F
V
12
N
I
K
X
O
Z
K
P
O
F
D
E
H
I
L
K
M
G
R
B
C
13 N
Q
P
A
N
I
L
K
M
R
G
B
T
13 N
A
D
Q
E
P
H
F
L
G
K

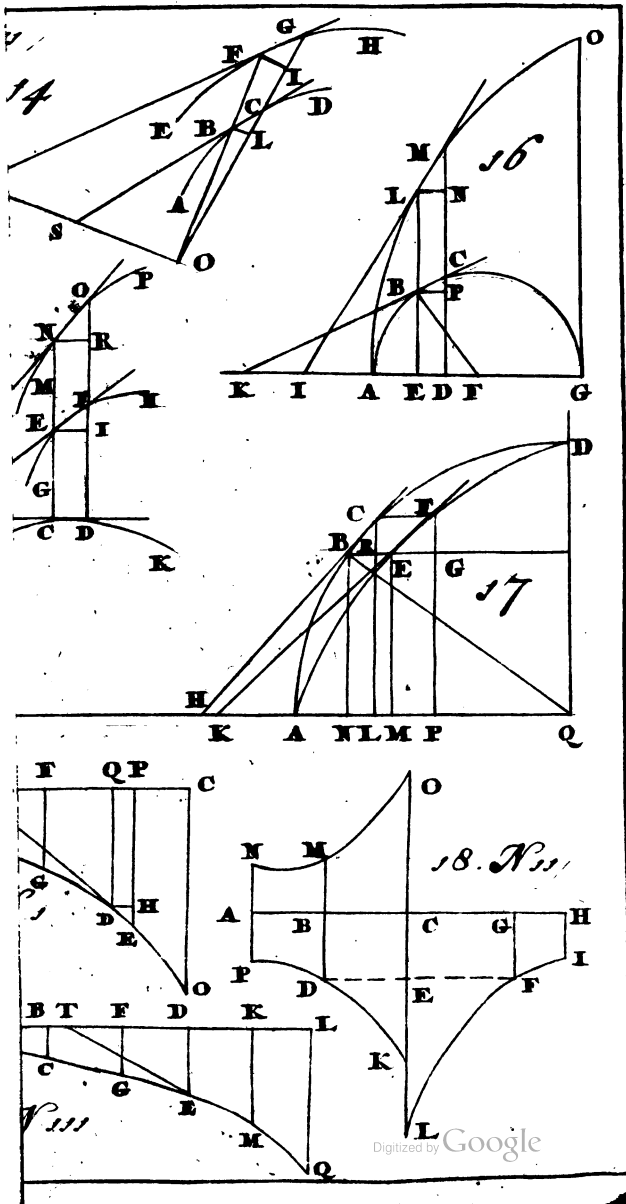

14
F
G
H
I
C
D
E
B
L
A
S
O
16
O
M
L
N
C
B
P
K
I
A
E
D
F
G
O
P
N
R
M
E
I
G
C
D
K
D
C
B
E
G
17
H
K
A
N
L
M
P
Q
C
N
M
O
18. N 111
A
B
C
G
H
I
P
D
E
F
K
L
G
D
H
E
O
B
T
F
D
K
L
C
G
E
M
Q
N 111

Fig. 19 N. 1

H R A I K E F G B D L C

G F E A H R K I D L B C

Fig. 19 N. 11

N. 1

E D H A Q P

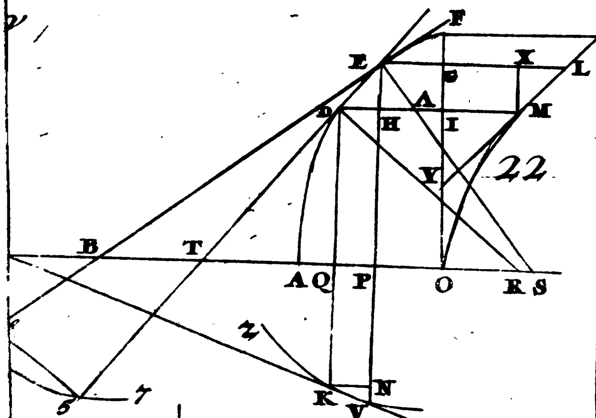
L

A B M P C G F D H S K E I O R N

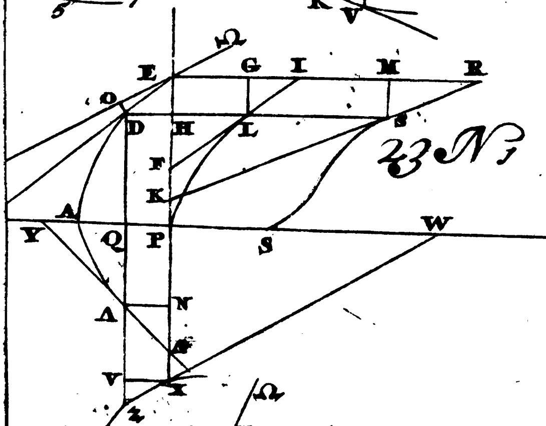
20

E D H A Q P T

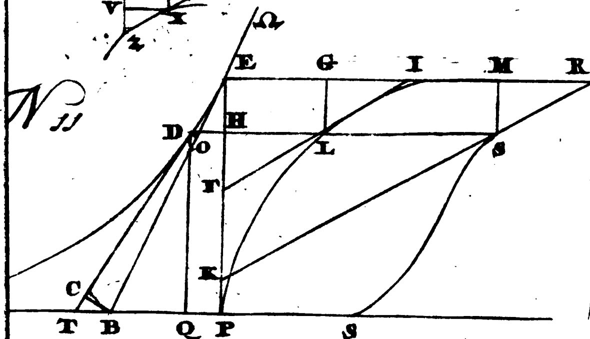
21. N. 11



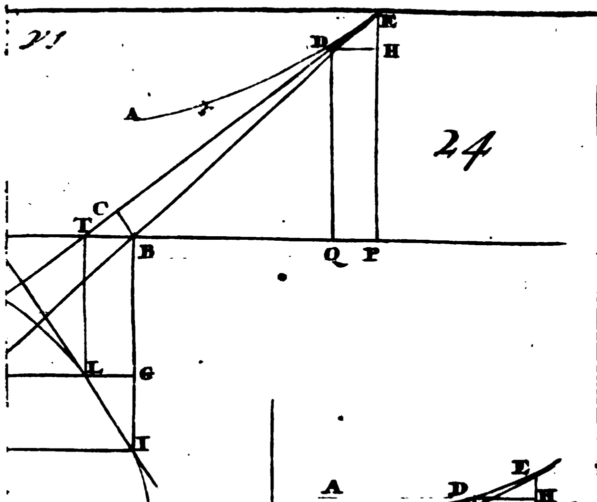
F
E
X
L
G
Δ
D
M
H
I
Y
22
B
T
A Q
P
O
R S
Z
5
7
K
N
V

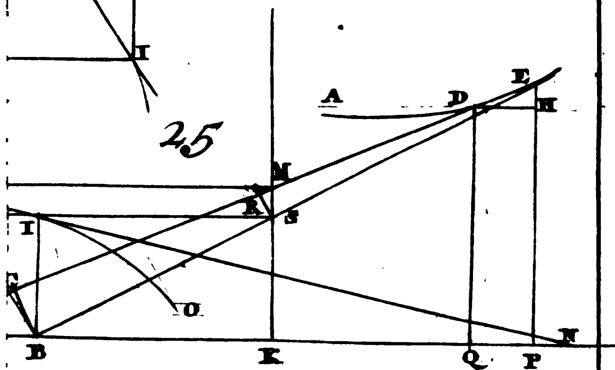



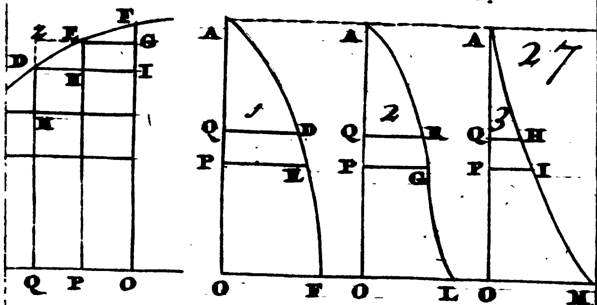
Ω
E
G
I
M
R
O
D
H
L
S
23 N 1
F
K
A
W
Y
Q
P
S
Λ
N
V
X
Z

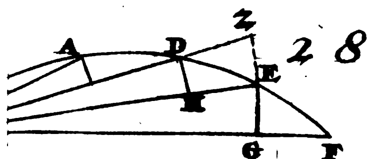



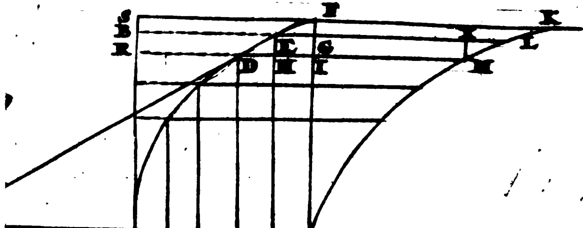
Ω
E
G
I
M
R
N 11
H
D
O
L
S
F
K
C
T
B
Q
P
S

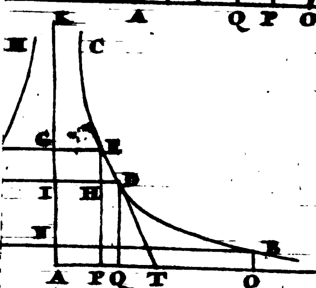

24
E
D
H
A
C
T
B
Q
P
L
G
I

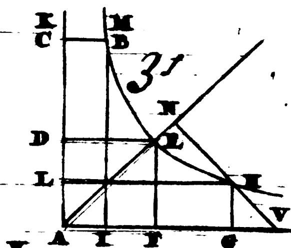

25
A
D
E
H
M
R
S
I
O
B
K
Q
P
N

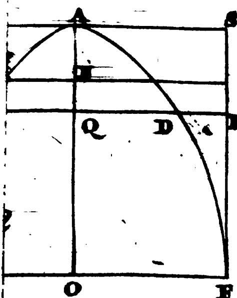

27
Z
E
F
G
D
I
M
Q
P
O
A
Q
D
P
E
O
F
A
2
Q
R
P
G
O
L
A
3
Q
H
P
I
O
M

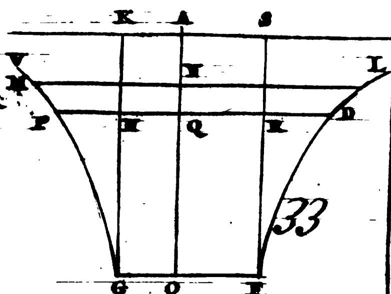

Z
A
D
E
28
G
F


S
B
R
E
G
D
H
I
K
L
M
A
Q
P
O

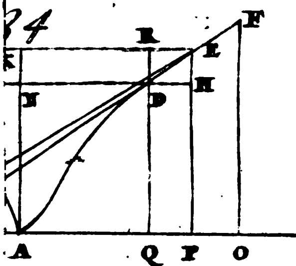

K
C
E
B
I
A
P
Q
T
O
V

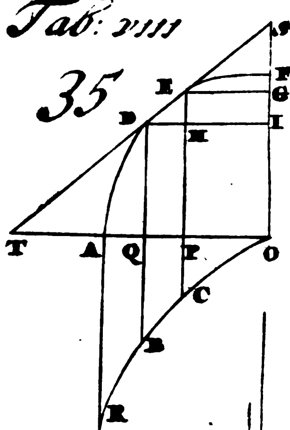

K
M
C
B
31
N
D
L
A
I
F
G
V

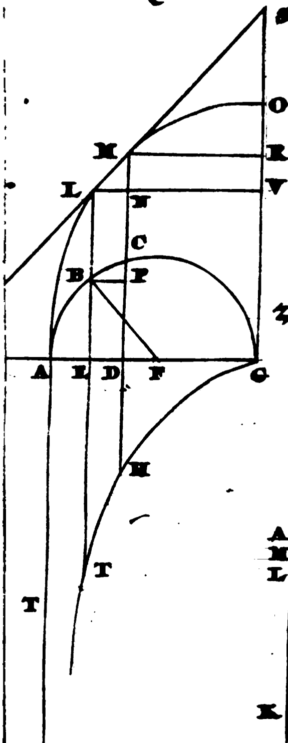

A
S
H
Q
D
R
O
F

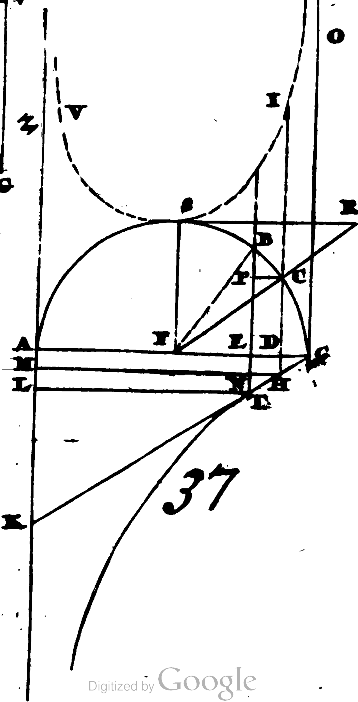

K
A
S
V
L
M
P
H
Q
D
G
O
F
33

Tab: VIII

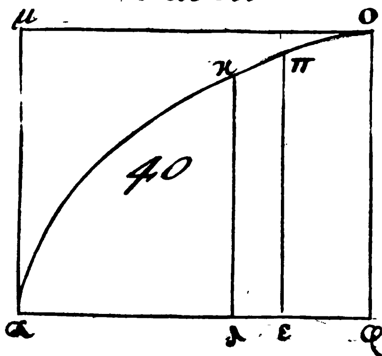

34
K
R
F
E
N
D
H
A
Q
P
O

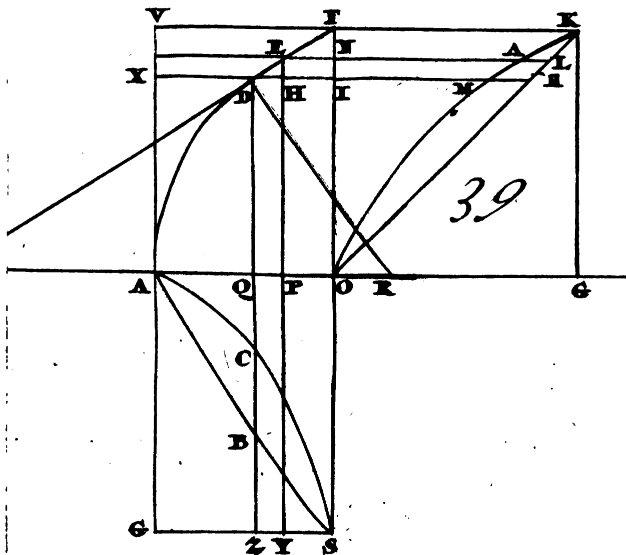

35
s
F
E
G
D
I
H
T
A
Q
P
O
C
B
R

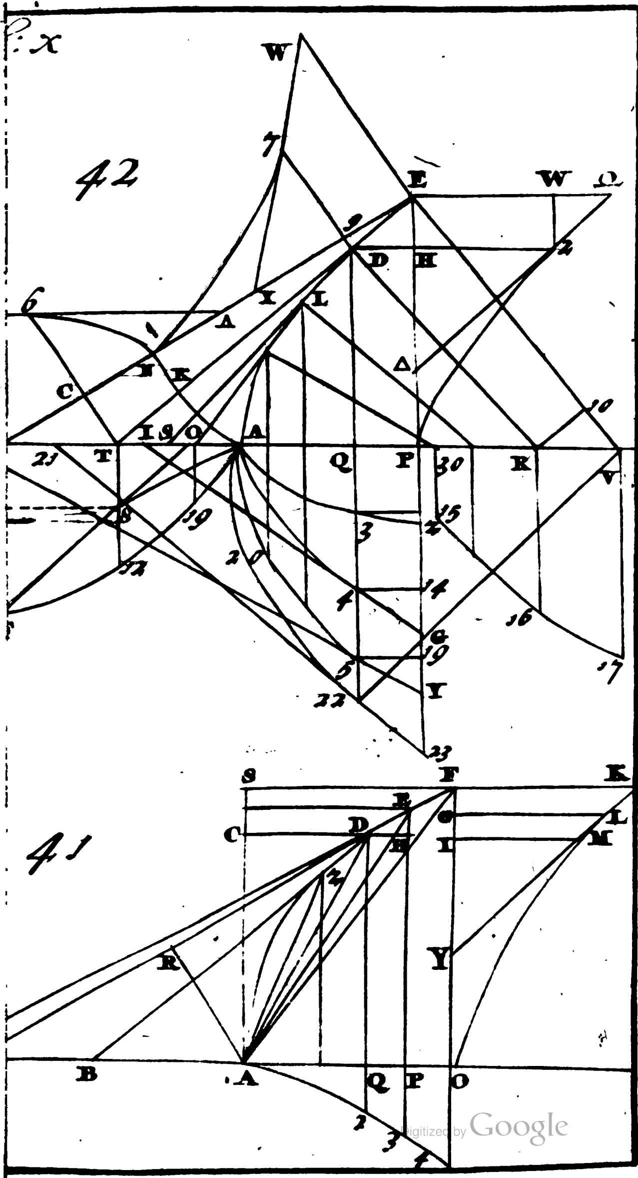

s
O
M
R
L
V
N
C
B
P
z
A
E
D
F
G
H
T
T


O
V
I
s
R
B
P
C
A
F
L
D
G
M
L
N
H
E
K
37

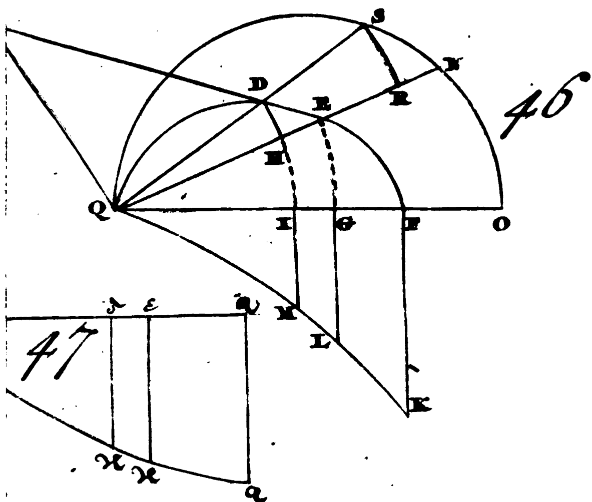

Tab: IX

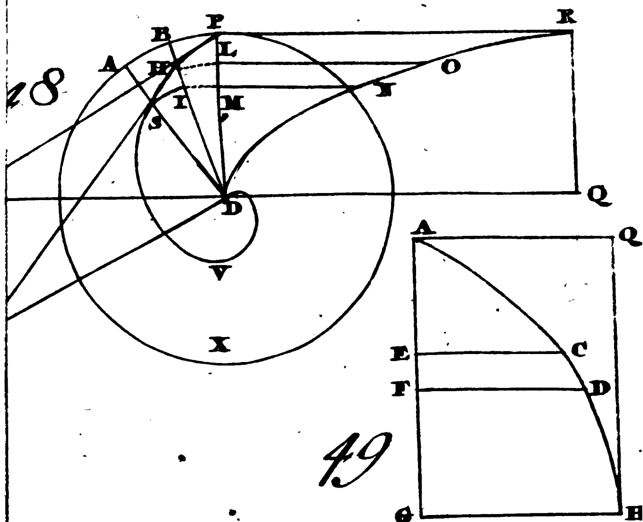

40

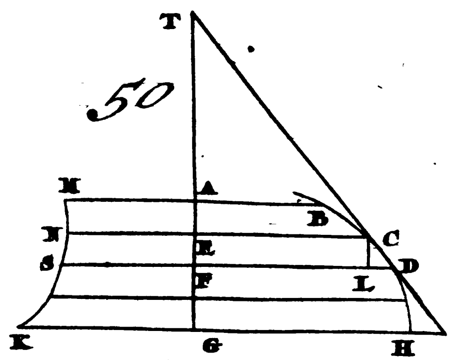

39


P: X
42
41
W
E
W
D
H
L
K
C
T
Q
P
R
V
G
Y
S
F
K
E
D
C
H
I
L
M
R
Y
B
A
Q
P
O

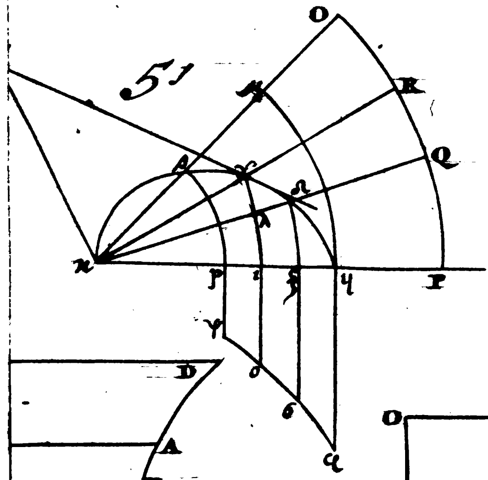
P. XII


S
N
D
R
E
H
Q
I
G
F
O
46
λ
ε
Q
47
M
L
K
ℋ
ℋ
Q

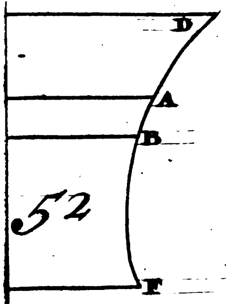

P
R
B
L
A
H
O
48
N
I
M
S
D
Q
V
X
A
Q
E
C
F
D
49
G
H



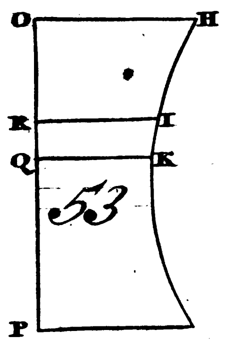
50
T
M
A
B
C
N
E
S
D
F
L
K
G
H

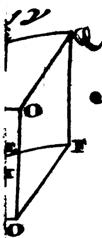
51
O
R
Q
P

D
A
B
52
F

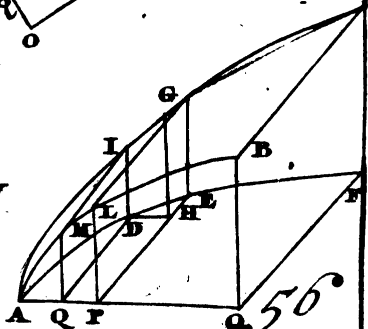



O
H
R
I
Q
K
53
P

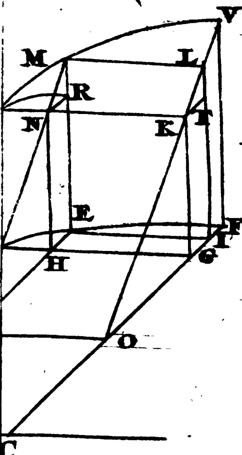


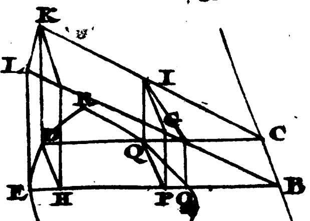
54

55 N: I



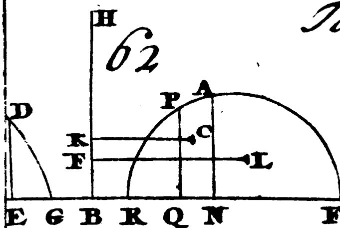
56



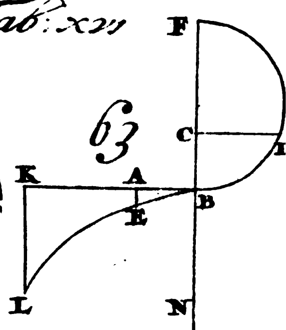


55 N: II

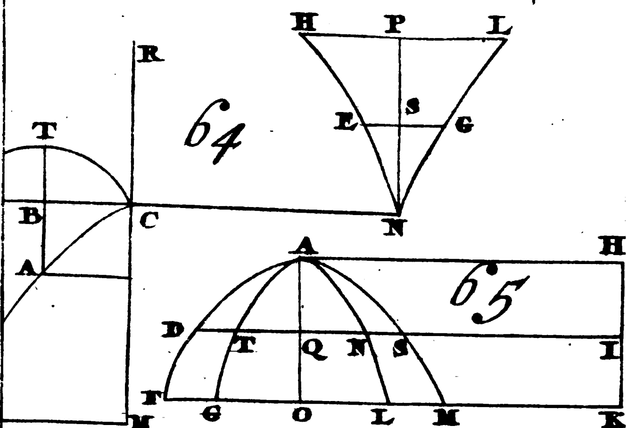
Tab: XVI



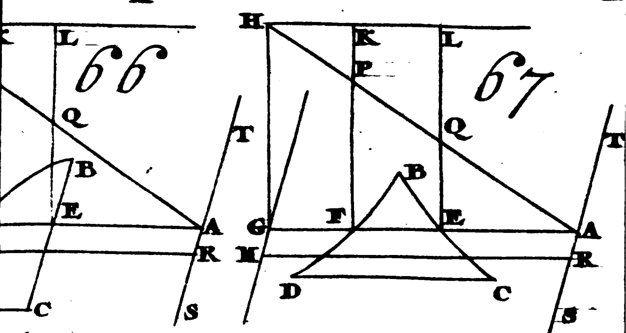
62
H
A
P
D
K
C
F
L
E
G
B
R
Q
N
F

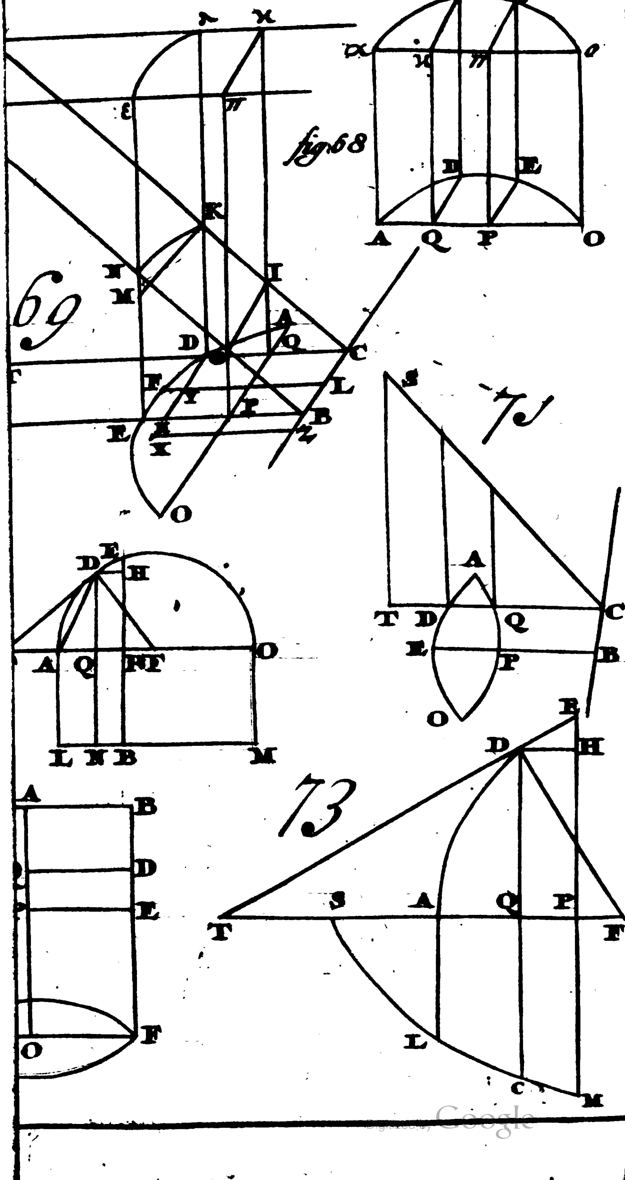
F
63
C
K
A
B
E
L
N

R
H
P
L
64
S
E
G
T
B
C
N
A
H
65
D
T
Q
N
S
I
F
G
O
L
M
K
M

L
H
K
L
66
P
67
Q
T
Q
T
B
B
E
F
E
A
G
A
R
M
R
D
C
C
S
S


fig. 68
69
71
73

III

fig: 74

fig: 75

fig: 76

fig: 77

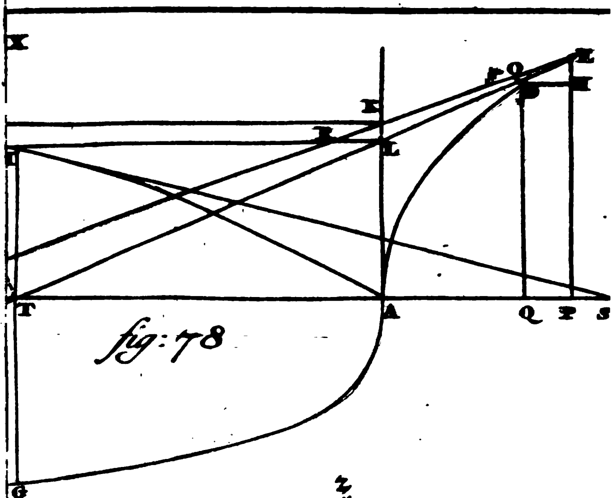


fig: 78

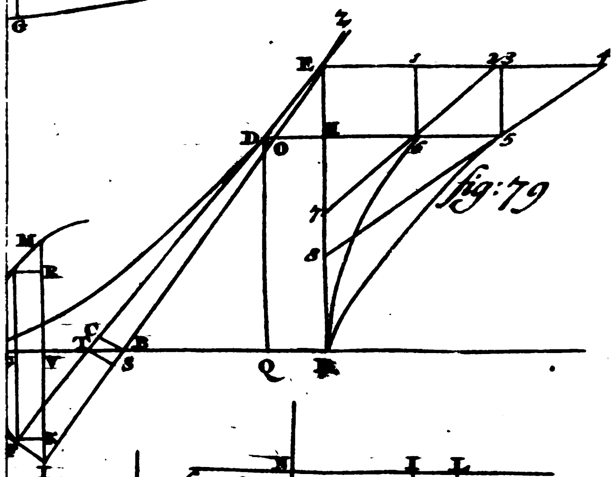


fig: 79

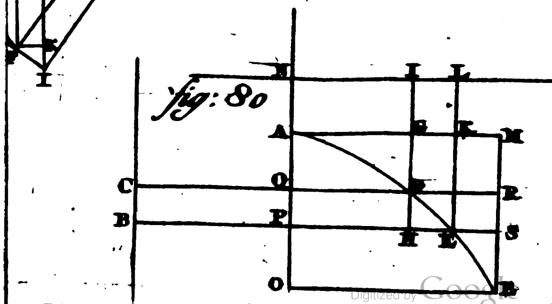
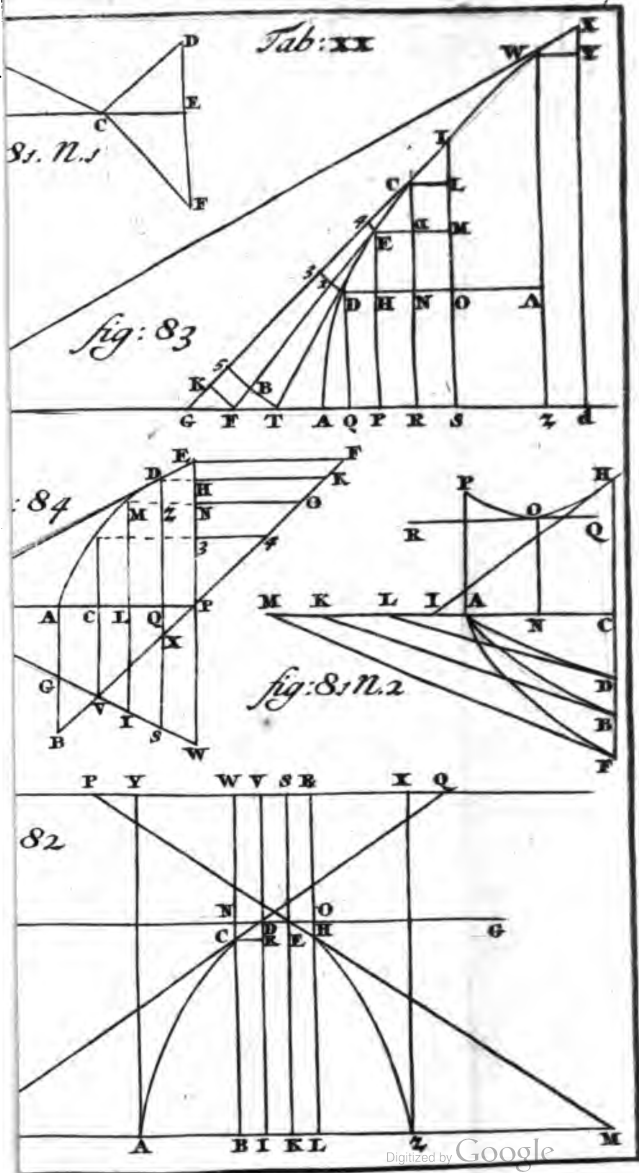
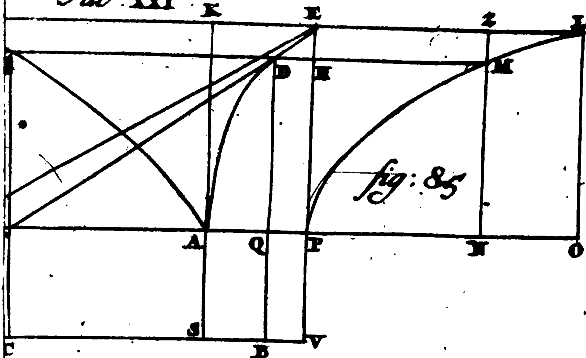
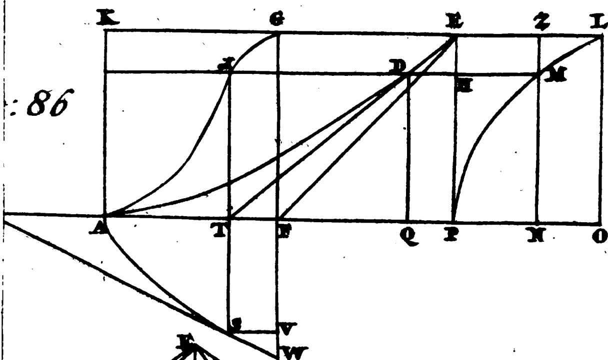


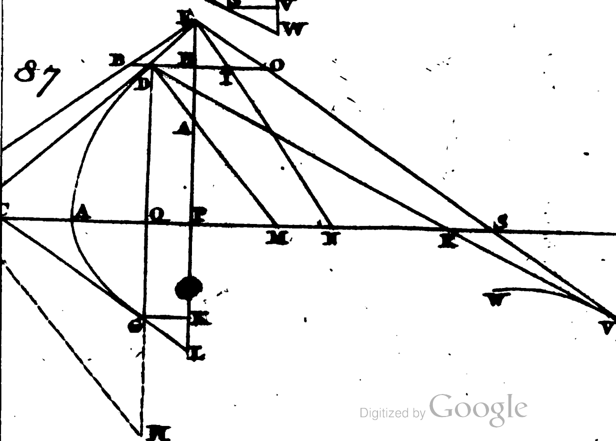
fig: 80



Tab: XX
fig: 83
fig: 81 N. 2


Tab: XXI
fig: 85
K E Z L
D H M
A Q P N O
S B V
C


:86
K G E Z L
D H M
A T F Q P N O
V
W


87
E
B H O
D I
A
C A Q P M I R S
W
K
L
V